目　　录

第一章　基本概念

由牛顿(Newton,1642—1727)和莱不尼兹(Leibniz,1646—1716)所创立的微积分,是人类科学史上划时代的重大发现.而微积分的产生与发展,和人们求解微分方程的需要有密切关系.所谓微分方程,就是联系着自变量,未知函数,以及未知函数的导数的方程.物理学,化学,生物学,工程技术和某些社会科学中的大量问题一旦加以精确的数学描述,往往会出现微分方程.在本书的各章中,将举出各种不同的引导到微分方程的实际例子.一个实际问题只要转化为微分方程,那么问题的解决就有赖于对微分方程的研究.就是在数学本身的一些分支中,微分方程也是经常用到的重要工具之一.本教程将主要介绍常微分方程的基本理论和某些基本方法.

我们首先在本章中给出微分方程及其解的定义,和它们的几何解释.对这些内容的理解需要在以后各章中进行反复和加深.

§1.　微分方程及其解的定义

利用数学手段研究自然现象和社会现象,或解决工程技术问题,一般先要建立数学模型,再对数学模型进行简化和求解,最后结合实际问题对结果进行分析和讨论.数学模型最常见的表达方式,是包含自变量和未知函数的函数方程.在很多情形下,未知函数的导数也会在方程中出现.例如,用牛顿第二运动定律列出质点的运动方程时,就要出现质点位移(未知函数)对时间(自变量)的二阶导数.

现在,我们给出如下一般的定义.

定义1 凡是联系自变量x,这个自变量的未知函数$y = y(x)$,及其直到n阶导数在内的函数方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

叫作**常微分方程**①,其中导数实际出现的最高阶数n叫作常微分方程(1.1)的**阶**.

例如,下面的方程都是常微分方程:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3, \quad (x \neq 0) \qquad (1.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \qquad (1.3)$$

$$y'' + yy' = x, \qquad (1.4)$$

$$\ddot{\theta} + a^2\theta = 0, \quad (\cdot \text{表示} \frac{d}{dt}, \text{常数 } a > 0). \qquad (1.5)$$

在前三个方程中,x是自变量,y是未知函数;在最后一个方程中,t是自变量,θ是未知函数.前两个方程都是一阶的;后两个方程都是二阶的.

在常微分方程(1.1)中如果右端函数F对未知函数y和它的各阶导数$y',\cdots,y^{(n)}$的全体而言是一次的,则称它是**线性**常微分方程.否则称它为**非线性**常微分方程.例如,常微分方程(1.2)和(1.5)是线性的;(1.3)和(1.4)是非线性的.

我们在定义1中把微分方程(1.1)冠以“常”字,指的是未知函数是一元的.如果未知函数是多元的,则微分方程中将出现偏导数,我们自然把这种方程叫作**偏微分方程**.例如

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + f = 0$$

是一阶线性偏微分方程,其中x, y和z为自变量,$f = f(x,y,z)$为

① 这里的F是一个关于变元$x,y,y',\cdots,y^{(n)}$的给定的已知函数.因此,诸如$\frac{dy}{dx} = y(y(x))$和$y'(x) = y(x-1)$之类的方程就不是常微分方程.

未知函数；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

为二阶线性偏微分方程，其中 x 和 y 为自变量，$u=u(x,y)$ 为未知函数.

本书主要介绍常微分方程，除了第十一章外，所说的微分方程都是指常微分方程，有时就索性简称为方程.

定义 2 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.1)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

对一切 $x\in J$ 都成立，则 $y=\varphi(x)$ 叫作微分方程(1.1)在区间 J 上的一个**解**.

例如，从定义 2 可以直接验证：

1) 函数 $y=\frac{1}{5}x^4$ 是微分方程(1.2)在区间 $(-\infty,0)$ 或区间 $(0,+\infty)$ 上的一个解；$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}x^4$ 也是方程(1.2)在同样区间上的一个解. 而且对任意的常数 C，

$$y=\frac{C}{x}+\frac{1}{5}x^4$$

都是方程(1.2)在同样区间上的解. 但 $y=C+\frac{1}{5}x^4(C\neq 0)$ 不是这个方程的解.

2) $y=\operatorname{tg}x$ 是微分方程(1.3)在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的一个解；而 $y=\operatorname{tg}(x-C)$ 是方程(1.3)在区间 $(C-\frac{\pi}{2},C+\frac{\pi}{2})$ 上的一个解，其中 C 为任意常数. 但 $y=C\operatorname{tg}x\ (C\neq 1)$ 不是解.

3) 函数 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 都是微分方程(1.5)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解. 而且对任意的常数 C_1 和 C_2，

$$\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$$

它是方程(1.5)在区间$(-\infty,+\infty)$上的解.

从上面的讨论中可以知道,微分方程的解可以包含一个或几个任意常数(与方程的阶数有关),而有的解不包含任意常数.为了加以区别,我们给出如下定义.

定义3　设n阶微分方程(1.1)的解$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$包含$n$个独立的任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$,则称它为**通解**;如果微分方程(1.1)的解$y=\varphi(x)$不包含任意常数,则称它为**特解**.

这里说n个任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$是独立的,其含义是$\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$关于$C_1,C_2,\cdots,C_n$的Jacobi行列式

$$\frac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[C_1,C_2,\cdots,C_n]}\neq 0,$$

其中$\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$分别是$\varphi$关于自变量$x$的相应导数.

容易看出$\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$是方程(1.5)的通解(请读者根据定义3来验证这个结论);而$\theta=3\sin at$和$\theta=7\cos at$都是方程(1.5)的特解.

显然,当任意常数一旦确定之后,通解也就变成了特解.

下面我们以简单的自由落体问题为例,说明微分方程及其通解和特解的某些实际背景.

所谓自由落体运动,指的是只考虑重力对落体的作用,而忽略空气阻力等其它外力的影响,参看图1-1.设落体B作垂直于地面的运动,取坐标轴y从地面垂直向上.问题是:落体B的位置坐标$y=y(t)$如何随时间t变化?

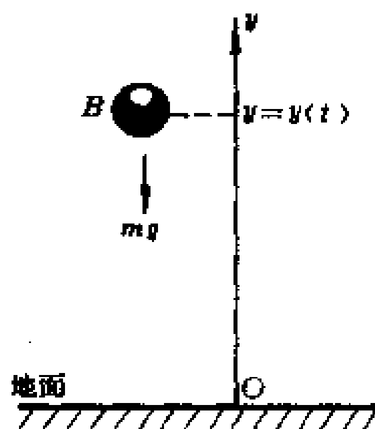


图1-1

因为$y=y(t)$表示B的位置坐标,所以它对t的一阶导数$\dot{y}=\dot{y}(t)$表示B的瞬时速度$v=v(t)$;而二阶导数$\ddot{y}=\ddot{y}(t)$则表示B的

瞬时加速度 $a = a(t)$. 假设 B 的质量为 m,重力加速度为 g(在地面附近,它近似于常数.通常取 $g = 9.80$ 米 / 秒^2),则由牛顿第二运动定律得出

$$m\ddot{y} = -mg,$$

上式右端出现负号,是由于 B 所受的重力与 y 轴的正方向相反.这样我们得到一个微分方程

$$\ddot{y} = -g. \tag{1.6}$$

为了得出落体的运动规律,需要求解这微分方程.

在(1.6)两侧对 t 积分一次,得到

$$\dot{y} = -gt + C_1, \tag{1.7}$$

其中 C_1 是一个任意常数;再把(1.7)对 t 积分一次,就得

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \tag{1.8}$$

其中 C_2 是另一个任意常数.易知(1.8)是微分方程(1.6)的通解.

因此,通解(1.8)就表示自由落体的运动规律.在(1.8)中包含两个任意常数,这说明微分方程(1.6)有无穷多个解.对求解结果的这种不确定性,该如何解释呢?如果检查一下我们最初对问题的提法,就会发现我们所作的唯一假定仅是某物体作自由落体运动,既没有指明物体在下落的初始时刻($t = 0$)的位置,又没有给出在初始时刻的速度.而方程(1.6)所表达的,正是物体自由下落时在任意瞬间 t 所满足的关系式.然而,容易明了,在同一时刻从不同高度和(或)以不同初速度自由下落的物体,将表现为不同的运动.这就须要考察落体 B 在初始时刻($t = 0$)的位置和速度,即下面的**初值条件**:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \tag{1.9}$$

其中 y_0 和 v_0 是已知的数据(通常由测量得到).把条件(1.9)分别代入(1.8)和(1.7)两式,推出

$$C_2 = y_0, \quad C_1 = v_0.$$

这样,在初值条件(1.9)下,从微分方程(1.6)唯一地确定了一个解

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0, \tag{1.10}$$

它描述了具有初始高度 y_0 和初始速度 v_0 的自由落体运动.

我们称(1.10)是**初值问题**

$$\begin{cases} \ddot{y} = -g, \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

的解. 有时也把初值问题(1.11)记为(1.6)+(1.9). 初值问题又名**柯西问题**.

从上面简单实例的分析中,可以得出下面的启示:

第一,微分方程的求解,与一定的积分运算相联系. 因此也常把求解微分方程的过程称为积分一个微分方程,而把微分方程的解称为积分. 由于每进行一次不定积分运算,会产生一个任意常数,因此仅从微分方程本身去求解(不顾及定解条件),则 n 阶方程的解应该包含 n 个任意常数.

第二,微分方程所描述的是物体运动的瞬时(局部)规律. 求解微分方程,就是从这种瞬时(局部)规律出发,去获得运动的全过程. 为此,需要给定这一运动的一个初始状态(即上述初值条件),并以此为基点去推断这一运动的未来,同时也可追溯它的过去. 对于 n 阶微分方程(1.1),初值条件的一般提法是

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.12}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定的初值,而 $y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是未知函数及其相应导数的给定的初值. 这样,不失一般性,n 阶微分方程的初值问题可以提成如下形式

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.13}$$

自然要问:当函数 F 满足什么条件时,初值问题(1.13)的解是存在的,或者更进一步,是存在而且唯一的?这是常微分方程理论中的一个基本问题. 在第三章中我们将就 $n=1$ 的情形进行证明,

只要 F 是连续的，则初值问题(1.13)的解(局部)存在.并在某些附加条件下证明解的存在和唯一性.我们将在第五章中把这些结果自然地推广到 $n \geqslant 2$ 的情形.

除了初值条件外，另外一种常见的定解条件是边值条件(参看第五章的悬链线之例)，在第九章中我们将对边值问题作一简要的介绍.

在结束本节之前，我们对 n 阶方程的通解中所包含的 n 个任意常数的独立性作一点说明.

如上所说，一个 n 阶微分方程的通解包含 n 个独立的任意常数(严格的证明见第十章).

反之，对于一个关于自变量 x 是 n 次可微的，而且包含 n 个独立的参数(任意常数) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的函数族，存在一个形如(1.1)的 n 阶微分方程，使得该函数族恰好是它的通解.

我们先来看一个例子.

【例 1】 求双参数函数族

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \tag{1.14}$$

所满足的微分方程.

解 把(1.14)对 x 先后求导两次，得出

$$y' = C_1 e^x (\cos x - \sin x) + C_2 e^x (\sin x + \cos x), \tag{1.15}$$

$$y'' = C_1 e^x (-2\sin x) + C_2 e^x (2\cos x). \tag{1.16}$$

从(1.14)和(1.15)两式可知 Jacobi 行列式

$$\frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} \equiv \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x (\cos x - \sin x) & e^x (\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明(1.14)中包含的两个任意常数 C_1 和 C_2 是独立的.据此，可从(1.14)和(1.15)两式解出 C_1 和 C_2 作为 x, y 和 y' 的函数，即

$$\begin{cases} C_1 = e^{-x}[y(\sin x + \cos x) - y' \sin x], \\ C_2 = e^{-x}[y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]. \end{cases}$$

然后把它们代入(1.16)式，得到一个二阶微分方程

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \tag{1.17}$$

这就是函数族(1.14)所满足的微分方程. 因此,双参数的函数族(1.14)是二阶微分方程(1.17)的通解. ▌

下面,我们把例1中的方法推广到一般情形. 这里要用到多元微分学中的隐函数定理,和某些较复杂的记号. 初学者可以暂时不必细究这一部分内容,等以后结合第十章首次积分的理论,回头再来看它,就会变得十分了然.

考虑对自变量 x 有 n 次连续导数的函数族

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \tag{1.18}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的,即:$\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}$ 对 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 存在连续偏导数,而且 Jacobi 行列式

$$\frac{D\left[\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}\right]}{D[C_1, C_2, \cdots, C_n]} \neq 0 \tag{1.19}$$

对 $(C_1, C_2, \cdots, C_n) \in G \subseteq R^n$ 和 $x \in J$ 成立.

将(1.18)对 x 逐次求导,可得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, C_1, \cdots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, C_1, \cdots, C_n). \end{cases} \tag{1.20}$$

条件(1.19)保证我们能利用隐函数定理,从(1.18)和(1.20)的前 $n-1$ 个等式中确定以 $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ 为变元的隐函数:

$$\begin{cases} C_1 = g_1\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n = g_n\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \end{cases} \tag{1.21}$$

再把(1.21)代入(1.20)的最后一个等式,就得到一个如下的 n 阶

微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}\left[x,g_1\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\cdots,g_n\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right]. \tag{1.22}$$

方程(1.22)是方程(1.1)的特殊形式.

注意到(1.18)与(1.21)的关系,(1.18)显然是(1.22)的解;另一方面,已知(1.18)中的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的,因此(1.18)是(1.22)的通解.

应该指出的是,隐函数定理是在区域 G 中每一点[以及 $(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 空间中的相应点]的局部范围内应用的.一般而言,我们可以把这些局部结果拼合起来,得出在一定区域内的整体结果.

在实际计算时,可以把(1.18)与(1.20)(共 $n+1$ 个等式)联立,设法从中消去 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,得出形如(1.1)的 n 阶微分方程.

当函数关系(1.18)是用 y 关于 x 的隐式方程

$$\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$$

给出时,也可以作类似的讨论.我们把细节留给有兴趣的读者,而仅在此指出一点:这时需要假设条件,使得能从联立方程

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}[\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)]=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}[\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)]=0\end{cases}$$

中可以消去 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,而得出形如(1.1)的 n 阶微分方程.

【例 2】 试求在 (x,y) 平面上过坐标原点的一切圆所满足的微分方程.

解 平面上经过原点的圆族具有方程:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2, \tag{1.23}$$

其中 a 和 b 是两个任意常数. 在(1.23)中,把 y 看成 x 的函数,再对 x 接连求导两次,并且把求导结果与(1.23)联立,得到:

$$\begin{cases} (x+a)+(y+b)y'=0, \\ 1+y'^2+(y-b)y''=0, \\ x^2+2ax+y^2+2by=0. \end{cases} \tag{1.24}$$

然后,从(1.24)中消去 a 和 b,就得到所求的微分方程为:

$$(x^2+y^2)y''-2(1+y'^2)(xy'-y)=0. \quad ▌$$

顺便指出,利用通解中任意常数的独立性,采用类似的讨论可以证明:对于在一定范围内给出的初值条件,可从通解中确定任意常数,得到满足相应初值条件的特解(见本节习题 3). 换句话说,在一定范围内,通解包含了微分方程的所有解. 这也是通解这一名词的一种名符其实的解释.

习 题 1-1

1. 验证下列函数是右侧相应微分方程的解或通解:

(1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $\quad y''-4y=0$;

(2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $\quad xy'+y=\cos x$;

(3) $y=x\left(\displaystyle\int\frac{e^x}{x}dx+C\right)$, $\quad xy'-y=xe^x$;

(4) $y=\begin{cases} -\dfrac{(x-C_1)^2}{4}, & -\infty<x<C_1, \\ 0, & C_1\leqslant x\leqslant C_2, \\ \dfrac{(x-C_2)^2}{4}, & C_2<x<+\infty, \end{cases}$ $\quad y'=\sqrt{|y|}$.

2. 求下列初值问题的解:

(1) $y'''=x$, $\quad y(0)=a_0$, $\quad y'(0)=a_1$, $\quad y''(0)=a_2$;

(2) $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$, $\quad y(0)=0$, (这里 $f(x)$ 是一个已知的连续函数);

(3) $\dfrac{dR}{dt}=-aR$, $\quad R(0)=1$, (这里 $a>0$ 是一个常数);

(4) $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$, $\quad y(x_0)=y_0$.

*3. 假设

(1) 函数 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的通解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的任意常数；

(2) 存在一组常数 $(\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n)\in R^n$ 和 $(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 空间中的点 $\overline{M}_0(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{y}_0',\cdots,\bar{y}_0^{(n-1)})$，满足

$$\begin{cases}\bar{y}_0=\varphi(\bar{x}_0,\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n),\\ \bar{y}_0'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n),\\ \qquad\cdots\cdots\\ \bar{y}_0^{(n-1)}=\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}(\bar{x}_0,\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n).\end{cases}$$

试证明：存在点 $\overline{M}_0$ 的某一邻域 U，使得对 U 内任意一点 $M_0=(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$，可确定一组数 $C_i=C_i(M_0)$，$i=1,2,\cdots,n$，使得 $y=\varphi(x,C_1(M_0),C_2(M_0),\cdots,C_n(M_0))$ 是初值问题

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases}$$

的解。

4. 求出：

(1) 曲线族 $y=Cx+x^2$ 所满足的微分方程；

(2) 曲线族 $y=C_1e^x+C_2xe^x$ 所满足的微分方程；

(3) 平面上以原点为中心的一切圆所满足的微分方程；

(4) 平面上一切圆所满足的微分方程.

§2. 微分方程及其解的几何解释

我们在上一节给出了微分方程及其解的定义，本节将对这些定义就一阶方程的情形给出几何解释. 依据这些解释，我们可以从微分方程本身获得它的任一解所应具有的某些几何特征.

考虑一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{2.1}$$

其中 $f(x,y)$ 是平面区域 G 内给定的连续函数. 假设它有一个解

$$\Gamma:\qquad y=\varphi(x),\quad (x\in I)\tag{2.2}$$

其中 I 是这个解的存在区间.

函数 $y=\varphi(x)$ 在 (x,y) 平面上的图形是一条光滑曲线，它称为方程(2.1)的一条**积分曲线**，仍记为 Γ.

任取一点 $P_0(x_0,y_0)\in\Gamma$，即 $x_0\in I$，$y_0=\varphi(x_0)$. 由于 $y=\varphi(x)$ 满足方程(2.1)，所以从导数的几何意义得出：曲线 Γ 在 P_0 点的切线斜率为

$$\varphi'(x_0)=f(x,\varphi(x_0))=f(x_0,y_0).$$

这个简单的等式展示了一个重要的信息：积分曲线 Γ 在 P_0 点的切线方程为

$$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0),$$

即使我们并不知道那积分曲线是什么.

这样，在区域 G 内每一点 $P(x,y)$，都可以作一个以 $f(P)$ 为斜率的(短小)直线段 $l(P)$，来标明积分曲线(如果存在的话)在该点的切线方向. 称 $l(P)$ 为微分方程(2.1)在 P 点的**线素**；而称区域 G 联同上述全体线素为微分方程(2.1)的**线素场**，或**方向场**.

由此可见，方程(2.1)的任何积分曲线 Γ 与它的线素场吻合，即对任一点 $P\in\Gamma$，Γ 在该点的切线与线素 $l(P)$ 吻合. 反之，若在区域 G 内有一条光滑(连续可微)的曲线

$$\Lambda:\qquad y=\psi(x),\quad (x\in J),\tag{2.3}$$

它与方程(2.1)的线素场吻合，则 Λ 就是(2.1)的一条积分曲线. 事实上，在 Λ 上任取一点 $P(x,y)$，即 $y=\psi(x)$，则 Λ 在 P 点的斜率为 $\psi'(x)$；而线素 $l(P)$ 的斜率为 $f(P)=f(x,\psi(x))$. 因为曲线 Λ 与线素场吻合，所以

$$\psi'(x)=f(x,\psi(x)),\quad (x\in J).$$

这就证明了曲线 Λ 是方程(2.1)的一条积分曲线.

现在我们可以对微分方程(2.1)及其解做出几何解释：给定微分方程(2.1)，就是给定平面区域 G 上的一个线素场. 求解初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0, \tag{2.4}$$

就是求一条经过点(x_0,y_0)并与线素场吻合的光滑曲线.

尽管人们根据线素场很难精确地描绘出这样的曲线,但只要这些小线素取得足够细密,就可以作出相当近似的积分曲线(假定初值问题(2.4)的解存在而且唯一).这在无法(或无必要)求出解的精确表达式时,使我们可以从微分方程本身的特有性质,去推断它的解的某些属性,使所讨论的问题在一定程度上获得解决.即使在方程可解的情况下,也常常需要利用这种几何解释,从微分方程本身去获得解族的直观几何形象,这时通解的表达式可能仅起辅助作用(参见下面的例1—例3,第二章§2的例1—例3,以及随后章节中的许多例子).

一般而言,关系式$f(x,y)=k$确定一条曲线L_k.显然,微分方程(2.1)的线素场在曲线L_k上各点的斜率都等于k.称这种曲线L_k为线素场的**等斜线**.在利用线素场研究积分曲线的分布状况时,作出等斜线常常是有帮助的.

【例1】 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{2.5}$$

的线素场.

解 等斜线方程为

$$\frac{y}{x}=k,\quad 即\quad y=kx.$$

这说明线素斜率为k的所有点,是由直线$y=kx$组成的.换句话说,直线$y=kx$与微分方程(2.5)的线素场相吻合,见图1-2.因此,直线$y=kx$就是方程(2.5)积分曲线,其中k是任意常数. ▌

【例2】 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{2.6}$$

的线素场.

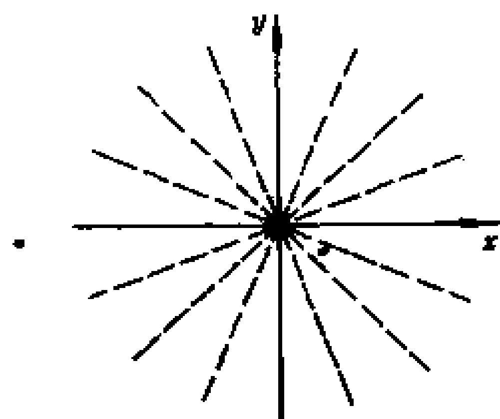


图 1-2

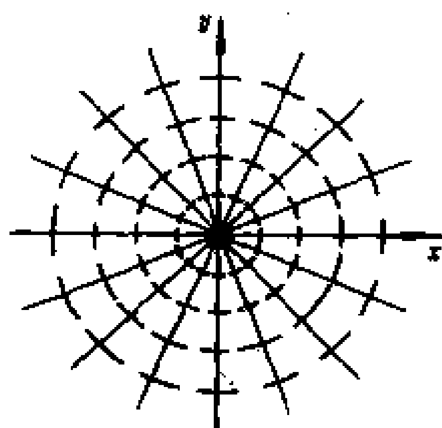


图 1-3

解 等斜线方程为

$$-\frac{x}{y}=k,\quad 即\ y=-\frac{1}{k}x.$$

这说明线素斜率为 k 的所有点，是由直线 $y=-\dfrac{1}{k}x$ 组成的. 换句话说，在过坐标原点的每一条直线上，微分方程(2.6)的线素方向都与该直线垂直，见图 1-3. 容易看出，方程(2.6)的积分曲线是以坐标原点为中心的同心圆 $x^2+y^2=C^2$. ▌

注意到当 $y=0$ 时(即 x 轴上的各点)，例 2 中的方程(2.6)失去意义. 但从线素场的观点来看，在 x 轴上的任一点，线素场的方向是竖直的. 因此我们可以用方程

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$$

代替原方程(2.6). 在 x 轴上的点附近，积分曲线不再能看成 y 作为 x 的单值函数，但可以看成 x 作为 y 的单值函数.

这就促使我们把一阶微分方程写成关于 x 和 y 的**对称形式**：

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{2.7}$$

当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时,在 (x_0,y_0) 点附近,方程(2.7)等价于

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)};$$

当 $P(x_0,y_0)\neq 0$ 时,在 (x_0,y_0) 点附近,方程(2.7)等价于

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

而且,当 $P(x_0,y_0)\neq 0$ 和 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时,这两种表达方式是一致的,即它们给出相同的线素场. 只是当 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ 时,在点 (x_0,y_0) 对方程(2.7)无法定义上述线素. 这样的点称为微分方程(2.7)的**奇异点**.

这样,代替例 2 中的方程(2.6),我们可以考虑方程

$$xdx+ydy=0, \tag{2.8}$$

由此积分,即得

$$x^2+y^2=C^2, \tag{2.9}$$

其中 C 是任意常数. 这种用隐函数方式给出的通解(2.9),叫作方程(2.8)的**通积分**.

在微分方程(2.8)和通积分(2.9)中,x 与 y 处于平等的地位. 在 $x\neq 0$ 时,可以视 x 为 y 的函数;而当 $y\neq 0$ 时,可以视 y 为 x 的函数. (注意,原点 O 是微分方程(2.8)的奇异点). 这种灵活的观点比较方便,可以省去对微分方程和其通积分中变量含意(即谁是自变量,谁是未知函数)的解释. 其实,在我们求解之前,本没有理由认为沿着积分曲线一定能将 y 整体地表成 x 的函数,或将 x 整体地表成 y 的函数. 因此把微分方程写成对称形式(2.7)似更合理. 在下一章讨论微分方程的解法时,我们将广泛应用对称形式.

还应该一提的是,当我们应用对称形式的微分方程时,微分方程的解族可能有所扩大. 例如,当把例 1 中的方程(2.5)写成对称形式

$$ydx-xdy=0$$

以后,除了通解 $y=Cx$ 之外,还有特解 $x=0$. 如果拘泥于原方程

(2.5),则 y 应作为 x 的函数,这样 $x=0$ 是不能称为解的.

作为本节的结束,我们举出一个具体线素场的模型——磁场.

【例 3】 条形磁铁的磁场.

假设在平面上安放一个长度为 $2a$ 的细磁棒,使它的两个端点分别在点 $(-a,0)$ 和 $(a,0)$,则在平面上就产生一个磁场.若再撒上一些短小的铁针,它们将按磁场的方向排列,出现一个具体线素场的模型——磁场.

现在要推导这磁场所对应的微分方程.我们把细磁棒简化为放置于点 $(-a,0)$ 和 $(a,0)$ 的两个异性点磁荷.它们在平面上任意一点 (x,y) 产生的磁场强度分别为 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$,见图 1-4.

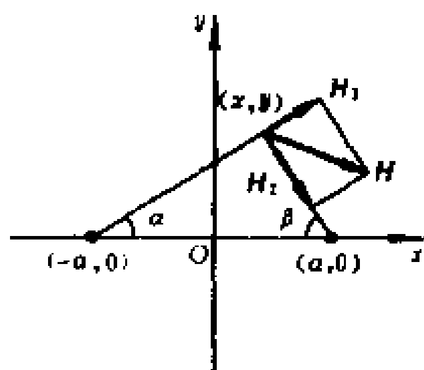


图 1－4

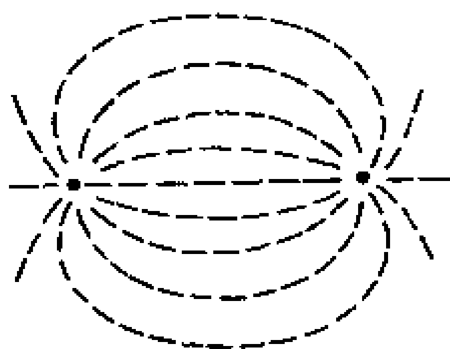


图 1－5

由物理学中的定律可知

$$\boldsymbol{H}_i=\frac{m_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i=\frac{m_i}{r_i^2}\boldsymbol{r}_{i0},\quad i=1,2.$$

这里 $\boldsymbol{r}_1$ 表示从 $(-a,0)$ 到 (x,y) 的向量,$\boldsymbol{r}_2$ 表示从 $(a,0)$ 到 (x,y) 的向量,$r_i=|\boldsymbol{r}_i|$,而 $\boldsymbol{r}_{i0}=\boldsymbol{r}_i/r_i$ 为 $\boldsymbol{r}_i$ 方向的单位向量;m_i 为磁荷的磁量.为简单计,取 $m_1=+1$ 和 $m_2=-1$.因此,在 (x,y) 点的磁场强度为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2$.

注意

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x+a}{r_1}, \quad \cos\beta = \frac{x-a}{r_2},$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r_1}, \quad \sin\beta = \frac{y}{r_2}.$$

分别取磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿 x 轴和 y 轴方向的分量

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \dfrac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}, \\ Q(x,y) = \dfrac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \dfrac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}, \end{cases}$$

则描述磁场强度的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}. \tag{2.10}$$

这个方程的线素场如图 1-5 所示(本节习题 3),由此大致可以看出它的积分曲线(亦即磁力线)的分布状况. 注意,微分方程(2.10)有两个奇异点$(-a,0)$ 和$(a,0)$,而它们却有明显的物理意义. ▌

习　题　1-2

1. 作出如下微分方程的线素场:

(1) $y' = \dfrac{xy}{|xy|}$;

(2) $y' = (y-1)^2$;

(3) $y' = x^2 + y^2$.

2. 利用线素场研究下列微分方程的积分曲线族:

(1) $y' = 1 + xy$;

(2) $y' = x^2 - y^2$.

3. 根据磁场的物理直观,描绘方程(2.10)的线素场和积分曲线族的大致分布.

第二章　初等积分法

所谓初等积分法，就是把微分方程的解通过初等函数或它们的积分来表达的方法．在微分方程发展的早期，由牛顿、莱不尼兹、欧拉（Euler，1707－1783）和伯努里兄弟（Jacob Bernoulli，1654－1705和 Johann Bernoulli，1667－1748）等发现的这些方法与技巧，构成了本章的中心内容．虽然刘维尔（Liouville，1809－1882）在1841年证明了大多数微分方程不能用初等积分法求解，但这些方法至今仍不失其重要性．这是因为，一方面，能用初等积分法求解的方程虽属特殊类型，然而它们在实际应用中却显得很常见和重要；另一方面，掌握这些方法与技巧，也是学好本课程和其他数学分支的基本训练之一．

§1．恰当方程

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1.1}$$

如果存在一个可微函数 $\Phi(x,y)$，使得它的全微分为

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

亦即它的偏导数为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y), \tag{1.2}$$

则称(1.1)为**恰当方程**，或**全微分方程**．

因此，当方程(1.1)为恰当方程时，可将它改写为

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

从而

$$\Phi(x,y) = C \tag{1.3}$$

就是方程(1.1)的一个通积分.

事实上,将任意常数 C 取定后,容易验证由(1.3)式所确定的隐函数 $y = u(x)$(或 $x = v(y)$)就是方程(1.1)的一个解.反之,若 $y = u(x)$(或 $x = v(y)$)是微分方程(1.1)的一个解,则有

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

因此,$y = u(x)$(或 $x = v(y)$)满足(1.3),其中积分常数 C 与解 $y = u(x)$(或 $x = v(y)$)有关.

【例 1】 求解微分方程

$$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0.$$

解 观察这个微分方程,我们看到它的左端恰好是函数 $\Phi = x^2y^3$ 的全微分.因此,上述方程可以写成 $d(x^2y^3) = 0$,从而求得通积分

$$x^2y^3 = C. \quad ▌$$

上面这个简单的观察求解法只是一个特例.在一般情况下,我们需要解决的问题是:

1. 如何判断一个给定的微分方程是或不是恰当方程?

2. 当它是恰当方程时,如何求出相应全微分的原函数?

3. 当它不是恰当方程时,能否将它的求解问题转化为一个与之相关的恰当方程的求解问题?

下面的定理对问题 1 和 2 给出了完满的解答.至于问题 3,则是贯穿本章随后各节的一个中心问题.对此问题,我们将先在 §2 — §4 中就若干特殊类型的方程给出有针对性的解答,而在 §5 中给出一个较为一般(但并不完整)的解答.

定理 1 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域

$$R:\quad \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta$$

上连续,且有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$,则微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4}$$

是恰当方程的充要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{1.5}$$

在 R 内成立. 而且,当(1.5)成立时,方程(1.4)的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C, \tag{1.6}$$

或者

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C, \tag{1.7}$$

其中(x_0,y_0)是 R 中任意取定的一点.

证明 先证必要性. 设(1.4)是一个恰当方程,则存在函数 $\Phi(x,y)$,满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y). \tag{1.8}$$

然后,我们在上面的第一式和第二式中,分别对 y 和 x 求偏导数,就可得到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{1.9}$$

由$\frac{\partial P}{\partial y}$与$\frac{\partial Q}{\partial x}$的连续性推知$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$和$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$是连续的,从而$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$. 因此,由(1.9)式推得(1.5)式.

再证充分性. 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 满足条件(1.5),我们来构造可微函数 $\Phi(x,y)$,使(1.8)式成立. 为了使(1.8)的第一式成立,可取

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \psi(y), \tag{1.10}$$

其中函数 $\psi(y)$ 待定,以使由(1.10)规定的函数 $\Phi(x,y)$ 适合(1.8)的第二式. 由(1.10)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \psi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx + \psi'(y).\end{aligned}$$

再利用条件(1.5)得到

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)dx+\psi'(y)$$

$$=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\psi'(y).$$

由此可见，为了使(1.8)的第二式成立，即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q(x,y),$$

只要令

$$\psi'(y)=Q(x_0,y),$$

亦即只要取

$$\psi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

即可. 这样，就找到了满足(1.8)的一个函数

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy. \qquad (1.11)$$

如果在构造 $\Phi(x,y)$ 时，先考虑使(1.8)的第二式成立，则可用同样的方法，得到满足(1.8)的另一函数

$$\tilde{\Phi}(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy. \qquad (1.12)$$

(注意，由于 $\Phi(x,y)$ 和 $\tilde{\Phi}(x,y)$ 有相同的全微分，所以它们之间只差一个常数.) 定理证完. ▌

【例 2】 求解微分方程

$$(2x\sin y+3x^2y)dx+(x^3+x^2\cos y+y^2)dy=0. \qquad (1.13)$$

解 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以方程(1.13)是恰当的. 因此，可以利用公式(1.6)或(1.7)直接求得通积分，但从基本训练的角度出发，我们仍采用在定理的充分性证明中的方法来计算通积分. 令函数 $\Phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x\sin y+3x^2y,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^3+x^2\cos y+y^2.$$

则对 x 积分第一式，得到

$$\Phi = x^2\sin y + x^3 y + \psi(y).$$

再将它代入上面第二式，即得

$$x^2\cos y + x^3 + \psi'(y) = x^3 + x^2\cos y + y^2,$$

由此得出

$$\psi'(y) = y^2,$$

从而

$$\psi(y) = \frac{1}{3}y^3.$$

这里省略了积分常数，由下面通积分的形式可知，这并不损害一般性. 所以

$$\Phi(x,y) \equiv x^2\sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3 = C \tag{1.14}$$

为方程(1.13)的通积分，其中 C 为任意常数. ▌

【附注 1】　对于某些恰当方程，可以采用更简便的分组凑全微分的方法求解. 例如，对于方程(1.13)的左端，可用如下分组求积的方法：

$$\begin{aligned}
&(2x\sin y + 3x^2 y)dx + (x^3 + x^2\cos y + y^2)dy \\
&= (2x\sin y dx + x^2\cos y dy) + (3x^2 y dx + x^3 dy) + y^2 dy \\
&= (\sin y d(x^2) + x^2 d\sin y) + (y d(x^3) + x^3 dy) + y^2 dy \\
&= d(x^2\sin y) + d(x^3 y) + d\left(\frac{1}{3}y^3\right) \\
&= d\left(x^2\sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3\right),
\end{aligned}$$

由此可直接得到通积分(1.14).

【附注 2】　求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数 $\Phi(x,y)$. 这实际上就是场论中的位势问题. 在单连通区域 R 上，条件(1.5)保证了线积分

$$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1.15}$$

与积分的路径无关. 因此, (1.15) 式确定了一个单值函数 $\Phi(x,y)$. 公式(1.11) 与(1.12) 所取的积分路径仅仅是两种简单的且便于计算的特殊路径. 如果区域不是单连通的, 那么一般而言 $\Phi(x,y)$ 可能是多值的. 例如, 对于方程

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0,$$

容易验证条件(1.5)在非单连通的环域

$$R_0: \quad 0 < x^2 + y^2 < 1$$

上成立. 由于

$$d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

因此得到

$$\Phi(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

它在环域 R_0 上是一个多值的函数.

习 题 2-1

判断下列方程是否为恰当方程; 并且对恰当方程求解.

1. $(3x^2 - 1)dx + (2x + 1)dy = 0.$
2. $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0.$
3. $(ax + by)dx + (bx + cy)dy = 0$ (a, b 和 c 为常数).
4. $(ax - by)dx + (bx - cy)dy = 0$, $(b \neq 0)$.
5. $(t^2 + 1)\cos u\,du + 2t\sin u\,dt = 0.$
6. $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0.$
7. $\left(\frac{y}{x} + x^2\right)dx + (\ln x - 2y)dy = 0.$
8. $(ax^2 + by^2)dx + cxydy = 0$, ($a$, b 和 c 为常数).
9. $\frac{2s - 1}{t}ds + \frac{s - s^2}{t^2}dt = 0.$
10. $xf(x^2 + y^2)dx + yf(x^2 + y^2)dy = 0$, 其中 $f(\cdot)$ 是连续的可微函数.

§2. 变量分离的方程

如果微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.1}$$

中的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均可分别表示为 x 的函数与 y 的函数的乘积，则称(2.1)为**变量分离的方程**. 因此，只要令 $P(x,y) = X(x)Y_1(y)$，$Q(x,y) = X_1(x)Y(y)$，变量分离的方程可以写成

$$X(x)Y_1(y)dx + X_1(x)Y(y)dy = 0. \tag{2.2}$$

先考虑一个特殊情形：$P = X(x)$，$Q = Y(y)$，则(2.2)成为

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0. \tag{2.3}$$

这显然是一个恰当方程，而且容易求出它的一个通积分为

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C. \tag{2.4}$$

一般而言，(2.2)未必是恰当方程. 但是，在上面对方程(2.3)求解之后，容易想到，如果以因子 $X_1(x)Y_1(y)$ 去除(2.2)式的两侧，就得到

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = 0. \tag{2.5}$$

此方程已具有(2.3)的形式(即 x 与 y 互相分离了)，因此它的通积分为

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = C. \tag{2.6}$$

这里需要澄清的一个问题是：用求解方程(2.5)来代替求解方程(2.2)是否合理？或者说这两个方程是否同解？显然，当 $X_1(x)Y_1(y) \neq 0$ 时，这两个方程是同解的. 假设存在实数 a(或 b)，使 $X_1(a) = 0$ (或 $Y_1(b) = 0$)，则函数 $x = a$ (或函数 $y = b$) 显然满足方程(2.2)，因此它是方程(2.2)的解. 但它不是方程(2.5)的解. 因此，当我们用方程(2.5)去替代方程(2.2)时，要注意补上这些可能丢失的解.

总结上述讨论，我们得到以下结论：变量分离的方程(2.2)的通积分由(2.6)给出(要进行必要的不定积分运算)；还要外加如下形式的特解(如果它们不能含于上述通积分之中的话)：

$$x = a_i, i = 1, 2, \cdots, \text{ 其中 } a_i \text{ 是 } X_1(x) = 0 \text{ 的根,}$$

和

$$y = b_j, j = 1, 2, \cdots, \text{ 其中 } b_j \text{ 是 } Y_1(y) = 0 \text{ 的根.}$$

【例1】 求解微分方程

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0, \tag{2.7}$$

并作出积分曲线族的草图.

解 当因子 $x(y^2 - 1) \neq 0$ 时，用它除方程(2.7)的两端，即得等价的方程

$$\frac{x^2 + 1}{x}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0.$$

再积分上式，得到

$$x^2 + \ln x^2 + \ln|y^2 - 1| = C_1,$$

由此推出

$$x^2 e^{x^2}|y^2 - 1| = e^{C_1},$$

亦即

$$y^2 = 1 + C\frac{e^{-x^2}}{x^2}, \tag{2.8}$$

其中 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. 此外，还从上述因子等于零时找到特解 $x = 0$ 和 $y = \pm 1$. 如果允许(2.8)中的 C 也取零值，则特解 $y = \pm 1$ 可含于(2.8)中. 因此方程(2.7)的通积分为

$$y^2 = 1 + C\frac{e^{-x^2}}{x^2}, \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数;}$$

外加特解 $x = 0$.

从微分方程(2.7)出发，或从方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 + 1)(y^2 - 1)}{xy}$$

出发,利用第一章 §2 线素场的方法,并参照通积分表达式(2.8),可以作出积分曲线族大致的图形(图 2-1). ▍

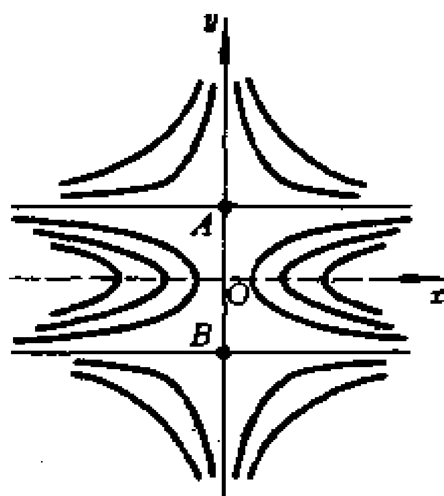


图 2-1

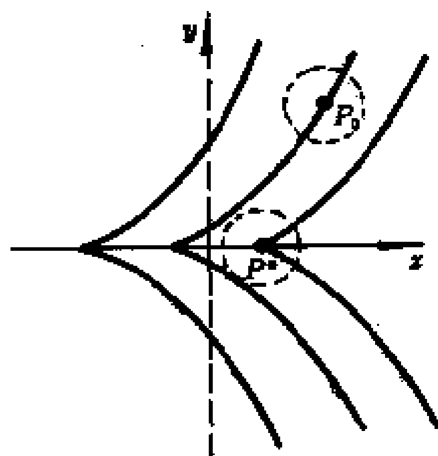


图 2-2

【例 2】　求解微分方程

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}, \tag{2.9}$$

并作出积分曲线族的图形.

解　当 $y \neq 0$ 时,由(2.9)得出

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = \frac{3}{2} dx.$$

由此可以积分,就有

$$y^{2/3} = x + C, \quad (x + C \geqslant 0),$$

因此得到通积分

$$y^2 = (x + C)^3, \quad (x \geqslant -C); \tag{2.10}$$

外加特解 $y = 0$,$(-\infty < x < +\infty)$. 利用方程(2.9)并参照通积分(2.10),不难作出积分曲线族的图形(图 2-2). ▍

观察图 2-1 和图 2-2,我们发现一个共同特点:在平面 (x,y) 上几乎经过每一点 P_0,在局部范围内有并且只有一条积分曲线. 图 2-1 中的例外情形是两个点 $A(0,1)$ 及 $B(0,-1)$;而图 2-2 中的例

外情形是整个 x 轴($y=0$) 上的所有点. 对前者的例外性是容易理解的,因为点 A 和 B 是方程(2.7) 仅有的两个奇异点(在这两点无法定义线素的方向);但对后者而言,x 轴上的每一点 $P^*(x^*,0)$ 并非是方程(2.9) 的奇异点(在这些点线素场的方向是水平的). 然而过点 P^*(即使在局部范围内) 都有无穷多条积分曲线通过. 事实上,每一条这样的积分曲线由两部分拼合而成:左半部分是与 x 轴重合的直线段,右半部分可以是 x 轴,也可以是向上或向下延伸的半立方抛物线. 左、右两部分在接合点相切. 接合点可以是 P^* 本身,也可以是 x 轴上 P^* 右侧邻近的任何点.

总之,微分方程(2.9) 满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解,当 $y_0\neq 0$ 时是局部唯一的;而当 $y_0=0$ 时是局部不唯一的. 能否对这种现象从理论上加以阐明呢? 我们将这一重要而有趣的问题留待下一章作一般性的讨论;而只在本节习题 5 中对形如 $\frac{dy}{dx}=f(y)$ 的方程讨论了解的唯一性问题.

【例 3】 物体在空气中的下落与特技跳伞.

我们假设质量为 m 的物体在空气中下落,空气阻力与物体速度的平方成正比,阻尼系数为 $k>0$. 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴 x,由牛顿第二运动定律推出微分方程

$$m\ddot{x}=mg-k\dot{x}^2,$$

其中 $\cdot=\frac{d}{dt}$. 记 $v=\dot{x}$,则方程变为

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2,\quad (v>0). \tag{2.11}$$

这是一个变量分离的方程. 当因子 $g-\frac{k}{m}v^2\neq 0$ 时,可由

$$\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt$$

的积分得到通解

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{Ce^{2at}+1}{Ce^{2at}-1},\quad (t\geqslant 0) \tag{2.12}$$

其中 $a=\sqrt{\frac{kg}{m}}$，而 C 为任意常数；当上述因子等于零时，可得到特解 $v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$. 利用方程(2.11)并参照它的通解(2.12)，容易作出这积分曲线族的图形，见图 2-3.

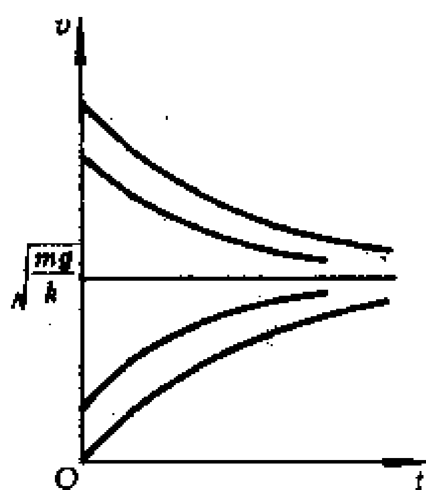


图 2-3

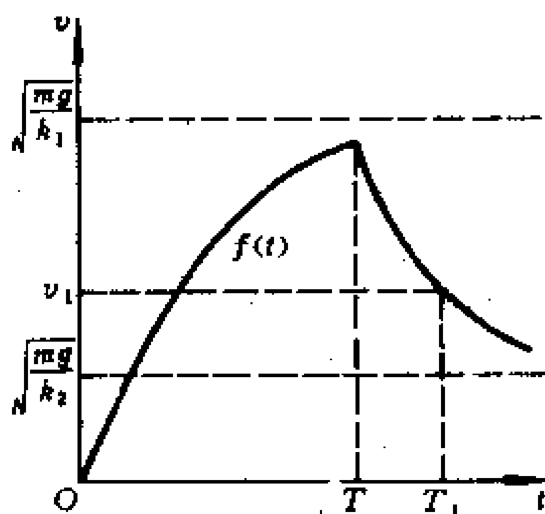


图 2-4

如果考虑初值条件 $v(0)=v_0$（即下落的初速度），则(2.12)中的任意常数由下式确定

$$C=\frac{v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}}}.$$

由图2-3可见，当 $0\leqslant v_0<\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 时，$v(t)<\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}$；当 $v_0>\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 时，$v(t)>\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}$.

现在考虑特技跳伞问题. 假设跳伞员开伞前的阻尼系数为 k_1，开伞后的阻尼系数为 k_2，$k_1\ll k_2$. 从开始跳伞到开伞的时间为 T，

则跳伞员下降速度曲线如图 2-4 所示. 容易看出,只要开伞后有足够的降落时间,落地速度将近似等于$\sqrt{\frac{mg}{k_2}}$,其中 k_2 是由降落伞的设计来调节的,以保证落地的安全.

设 $v=f(t)$ 为降落伞下降的速度函数(见图 2-4),而跳伞高度为 H_0,则 $H_0=\int_0^{T_1}f(t)dt$,其中 T_1 为落地时间. 因此,落地速度为 $v_1=f(T_1)$. 特技跳伞就要求在给定的高度 H_0 下掌握开伞时间 T,使得降落时间 T_1 为最小,而且有安全的落地速度 v_1. 这是一个有趣的数学问题. ▌

习 题 2-2

1. 求解下列微分方程,并指出这些方程在 xOy 平面上有意义的区域:

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$;

(3) $\frac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$;

(4) $\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$;

(5) $\frac{dy}{dx}=(\cos x\cos 2y)^2$;

(6) $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$.

2. 求解下列微分方程的初值问题:

(1) $\sin 2x dx+\cos 3y dy=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$;

(2) $x dx+ye^{-x}dy=0$, $y(0)=1$;

(3) $\frac{dr}{d\theta}=r$, $r(0)=2$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln|x|}{1+y^2}$, $y(1)=0$;

(5) $\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=xy^3$, $y(0)=1$.

3. 求解下列微分方程，并作出相应积分曲线族的简图：

(1) $\frac{dy}{dx}=\cos x$;

(2) $\frac{dy}{dx}=ay$,（常数 $a\neq 0$）;

(3) $\frac{dy}{dx}=1-y^2$;

(4) $\frac{dy}{dx}=y^n$, $(n=\frac{1}{3},1,2)$.

4. 跟踪：设某 A 从 xOy 平面上的原点出发，沿 x 轴正方向前进；同时某 B 从点 $(0,b)$ 开始跟踪 A，即 B 与 A 永远保持等距 b. 试求 B 的光滑运动轨迹.

*5. 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(y), \tag{2.13}$$

其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某邻域（例如，区间 $|y-a|\leqslant\varepsilon$）内连续，而且 $f(y)=0$，当且仅当 $y=a$. 则在直线 $y=a$ 上的每一点，方程(2.13)的解局部唯一，当且仅当瑕积分

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|=\infty \qquad \text{（发散）}.$$

（从而在特解 $y=a$ 的邻域内的每一点，方程(2.13)的解都局部唯一）.

6. 利用上题结果（可以不解方程），作出下列微分方程积分曲线族的大致图形：

(1) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases} y\ln|y|, & \text{当 } y\neq 0,\\ 0, & \text{当 } y=0.\end{cases}$

§3. 一阶线性方程

本节讨论一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{3.1}$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 上连续. 当 $q(x)\equiv 0$ 时，方程(3.1)成为

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0. \tag{3.2}$$

方程(3.1)($q(x)\not\equiv 0$)叫作**非齐次**线性方程，而(3.2)叫作与(3.1)相应的**齐次**线性方程.

我们首先讨论齐次线性方程(3.2)的解法. 为此，将(3.2)改写为对称形式：

$$dy+p(x)ydx=0,$$

这是一个变量分离的方程. 当 $y\neq 0$ 时，以 y 除方程两侧，得到

$$\frac{dy}{y}+p(x)dx=0.$$

积分后可得通解

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{3.3}$$

而且特解 $y=0$ 也含于此通解之中(对应于 $C=0$).

现在来求解非齐次线性方程(3.1). 我们也把(3.1)改写为如下的对称形式：

$$dy+p(x)ydx=q(x)dx. \tag{3.4}$$

一般而言，(3.4)不是恰当方程. 但以因子 $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ 乘(3.4)两侧(注意 $\mu(x)\neq 0$)，得到方程

$$e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}p(x)ydx=e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

亦即

$$d(e^{\int p(x)dx}y)=q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

它是恰当方程. 由此可直接积分，得到通积分

$$e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

这样，就求出了方程(3.4)的通解

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right), \tag{3.5}$$

其中 C 是一个任意常数.

上述方法叫作**积分因子法**. 这是因为我们用因子 $\mu(x)$ 乘微分

方程(3.4)的两侧后,它就转化为一个全微分方程,从而获得它的积分.求解线性微分方程(3.1)的另一重要方法——**常数变易法**(见本节习题4),我们将在第六章 §3 中就高阶线性微分方程的情形进行详细的介绍.

【例 1】　求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3,\quad (x\neq 0).$$

解　当然可以用公式(3.5)直接求得通解.但应用积分因子法比记忆一个公式更简便.这就是说,用积分因子

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=|x|,\quad (x\neq 0),$$

乘方程两侧,推出

$$\frac{d}{dx}(xy)=x^4,\quad (x>0 \text{ 或 } x<0).$$

再积分就得通解

$$y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x},\quad (x>0 \text{ 或 } x<0),$$

其中 C 为任意常数. ▍

为确定起见,通常把通解(3.5)中的不定积分写成变上限的定积分,即

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}\left[C+\int_{x_0}^{x}q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}dx\right].$$

或

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)dt}ds. \tag{3.6}$$

利用这种形式,容易得到初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{3.7}$$

的解为

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)dt}ds, \tag{3.8}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 I 上连续，而 $x_0 \in I$.

下面的性质 1 — 4，是线性微分方程所特有的；性质 5 可从前几个性质推出. 这几个性质的证明不难，留给读者完成. 我们仅对性质 1 和性质 5 作一点简要的说明.

性质 1 齐次线性方程(3.2)的解或者恒等于零，或者恒不等于零.

此性质容易从(3.2)的通解表达式(3.3)得出.

性质 2 线性方程的解是整体存在的，即方程(3.1)或(3.2)的任一解都在 $p(x)$ 和 $q(x)$ 有定义且连续的整个区间 I 上存在.

性质 3 齐次线性方程(3.2)的任何解的线性组合仍是它的解；齐次线性方程(3.2)的任一解与非齐次线性方程(3.1)的任一解之和是非齐次线性方程(3.1)的解；非齐次线性方程(3.1)的任意两解之差必是相应齐次线性方程(3.2)的解.

性质 4 非齐次线性方程(3.1)的任一解与相应齐次线性方程(3.2)的通解之和构成非齐次线性方程(3.1)的通解.

性质 5 线性方程的初值问题(3.7)的解存在且唯一.

性质 5 的存在性部分是显然的，因为(3.8)式就提供了一个解. 现在来证明解的唯一性. 假设初值问题(3.7)有两个解 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$，则由性质 3 知 $y = \psi(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ 是相应齐次线性方程(3.2)的一个解；另一方面，$\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 满足同一个初值条件，这蕴含 $\psi(x_0) = \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0$. 再由性质 1 可知 $\psi(x) \equiv 0$，即当 $x \in I$ 时，$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

在结束本节之前，我们通过两个例子说明以上性质的应用.

【例 2】 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x), \tag{3.9}$$

其中 $a > 0$ 为常数，而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程(3.9)的 2π 周期解.

解 利用(3.6)式，容易写出方程(3.9)的通解为

$$y(x)=Ce^{-ax}+\int_0^x e^{-a(x-s)}f(s)ds. \qquad (3.10)$$

现在选择常数 C，使 $y(x)$ 成为 2π 周期函数，即

$$y(x+2\pi)\equiv y(x) \qquad (3.11)$$

成立. 我们先来证明，要使(3.11)对所有 x 成立，其实只需对某一特定的 x(例如 $x=0$) 成立，即只要求

$$y(2\pi)=y(0). \qquad (3.12)$$

事实上，由于 $y(x)$ 是方程(3.9)的解，且 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$，所以 $y(x+2\pi)$ 也是(3.9)的解. 因此，函数 $u(x):=y(x+2\pi)-y(x)$ 是相应齐次方程的解. 如果(3.12)成立，则 $u(x)$ 满足初值条件 $u(0)=0$. 因此，由性质 1 可见，$u(x)\equiv 0$. 从而(3.11)成立.

现将公式(3.10)代入(3.12)，得到

$$C=\frac{1}{1-e^{-2a\pi}}\int_{-2\pi}^0 e^{as}f(s)ds,$$

把它代回(3.10)式，就得到所求的 2π 周期解，再利用 $f(x)$ 的 2π 周期性，最后可以把这个解简化为

$$y(x)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds. \qquad (3.13)$$

【例 3】 RL 串联电路.

如图 2-5 所示，电感 L，电阻 R 及电源电压降 E 均为正的常数. 求电键闭合后电路中的电流强度 $i=i(t)$.

解 利用电学中的克希霍夫定律，得到微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E. \qquad (3.14)$$

这是一个一阶线性方程，它显然有特解 $i=\frac{E}{R}$. 而相应齐次线性方程的通解为 $Ce^{-\frac{R}{L}t}$，其中 C 为任意常数. 因此，利用上述线性方程的性质 4，可知方程(3.14)的通解为

$$i=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

由此可以确定满足初值条件 $i(0)=0$ 的解为

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

它的图形见图 2-6. ▌

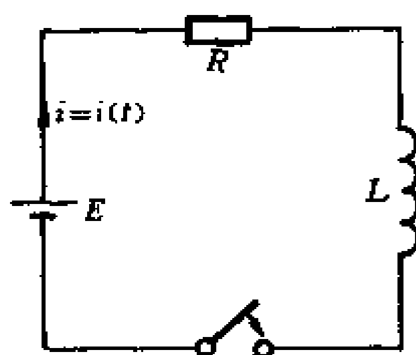


图 2-5

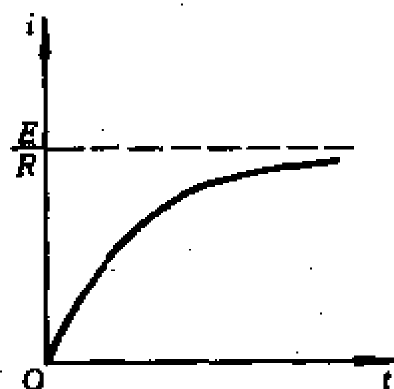


图 2-6

习　题　2-3

1. 求解微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx}+2y=xe^{-x}$；

(2) $\frac{dy}{dx}+y\,\mathrm{tg}x=\sin 2x$；

(3) $x\frac{dy}{dx}+2y=\sin x,\quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}$；

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-x^2}y=1+x,\quad y(0)=1.$

2. 把下列微分方程化为线性微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2y}$；

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$；

(3) $3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3+x^3=0$；

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}+x\,\mathrm{tg}y.$

3. 设 $y=\varphi(x)$ 满足微分不等式

$$y' + a(x)y \leqslant 0, \quad (x \geqslant 0).$$

求证：

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}, \quad (x \geqslant 0).$$

4. 用常数变易法求解非齐次线性方程(3.1)，即：假设方程(3.1)有形如(3.3)的解，但其中的常数 C "变易"为 x 的一个待定函数 $C(x)$. 然后将这种形式的解代入(3.1)，再去确定 $C(x)$.

5. 考虑方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{3.15}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数. 试证：

(1) 若 $q(x) \equiv 0$，则方程(3.15)的任一非零解以 ω 为周期，当且仅当函数 $p(x)$ 的平均值

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)dx = 0;$$

(2) 若 $q(x) \not\equiv 0$，则方程(3.15)有唯一的 ω 周期解，当且仅当 $\bar{p} \neq 0$. 试求出此解.

6. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有界. 证明：方程

$$y' + y = f(x)$$

在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有并且只有一个有界解. 试求出这个解，并进而证明：当 $f(x)$ 还是以 ω 为周期的周期函数时，这个解也是一个以 ω 为周期的周期函数.

7. 令空间 $H^0 = \{f(x) \mid f$ 是以 2π 为周期的连续函数$\}$. 易知 H^0 关于实数域构成一个线性空间. 对于任意 $f \in H^0$，定义它的模

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|.$$

证明 H^0 是一个完备的空间(即 Banach 空间). 利用(3.13)式可以在空间 H^0 中定义一个变换 φ，它把 f 变到 y. 试证：φ 是一个从 H^0 到 H^0 的线性算子，而且它是有界的. 即要证：

(1) 对任何常数 C_1 和 C_2，以及任何 $f_1, f_2 \in H^0$，我们有

$$\varphi(C_1f_1 + C_2f_2) = C_1\varphi(f_1) + C_2\varphi(f_2);$$

(2) 对任何 $f \in H^0$，我们有

$$\|\varphi(f)\| \leqslant k\|f\|,$$

其中 $k > 0$ 是常数.

§4. 初等变换法

在前面几节中，我们已经介绍了对恰当方程、变量分离的方程和一阶线性方程的求解法. 现在，凭借初等变换之助，我们来扩充可求解方程的范围. 事实上，读者已在上一节的习题 2 中看到了变换对求解微分方程的作用. 下面再看两个简单的例子.

【例 1】 对于形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x+y)$$

的方程，如果引进变换 $u = x + y$，其中 u 为新的未知函数，则方程立即化为

$$\frac{du}{dx} = 1 + f(u),$$

这是一个变量分离的方程，因此不难求得通解. ▌

【例 2】 对于微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + \sin x}{2y},$$

如果引进变换 $v = y^2$，则方程变为

$$\frac{dv}{dx} = xv + \sin x,$$

这是一个对 v 的一阶线性方程，它的解法刚在上节讨论过. ▌

下面介绍几个标准类型的微分方程，它们可以通过适当的初等变换转化为变量分离的方程或一阶线性方程.

4.1 齐次方程

如果微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.1}$$

中的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都是 x 和 y 的同次(例如 m 次)齐次函数，即：

$$P(tx,ty)=t^mP(x,y),\quad Q(tx,ty)=t^mQ(x,y),\tag{4.2}$$

则称方程(4.1)为**齐次方程**(注意这与上节定义的齐次线性方程不是一回事).

对于齐次方程(4.1),标准的变量替换是

$$y=ux,\tag{4.3}$$

其中u为新的未知函数,x仍为自变量.注意,从关系(4.2)易知

$$\begin{cases}P(x,y)=P(x,xu)=x^mP(1,u),\\Q(x,y)=Q(x,xu)=x^mQ(1,u).\end{cases}\tag{4.4}$$

因此,把变换(4.3)代入方程(4.1),就得

$$x^m[P(1,u)+uQ(1,u)]dx+x^{m+1}Q(1,u)du=0,\tag{4.5}$$

这是一个变量分离的方程.

【附注1】 易知方程(4.1)为齐次方程的一个等价定义是,它可以化为如下的形式

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

【附注2】 容易看出,$x=0$是方程(4.5)的一个特解.但它未必是原方程(4.1)的解.出现这种情况的原因在于,变换(4.3)当$x=0$时不是可逆的.

【例3】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

解 这显然是一个齐次方程.因此,令$y=ux$,得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u},$$

亦即

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

积分此式,可得

$$\operatorname{arc\,tg}u-\ln\sqrt{1+u^2}=\ln|x|-\ln C,$$

（任意常数 $C>0$）. 从而

$$|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\operatorname{arctg}u}.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 代回上式，就得通积分

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

如果用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则得到较简单的形式

$$r=Ce^{\theta}.$$

这是以原点为焦点的螺线族（焦点的定义将在第八章介绍）. ▌

【例 4】 讨论形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$$

的方程的求解法. 这里设 a,b,c,m,n 和 l 为常数.

解 当 $c=l=0$ 时，它是齐次方程，因此可用变换 $u=\frac{y}{x}$ 求解. 当 c 和 l 不全为零时，分如下两种情形讨论：

（1） $\Delta=an-bm\neq 0$.

此时可选常数 α 和 β，使得

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0, \\ m\alpha+n\beta+l=0. \end{cases}$$

取自变量和未知函数的（平移）变换

$$\begin{cases} x=\xi+\alpha, \\ y=\eta+\beta, \end{cases}$$

则原方程就化为 ξ 与 η 的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{m\xi+n\eta}\right),$$

这已是齐次方程. 因此，只要令 $u=\frac{\eta}{\xi}$，即可把它化成变量分离的方程.

（2） $\Delta=an-bm=0$.

此时有 $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\lambda$. 因此，原方程化为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+l}\right).$$

令 $v=ax+by$ 为新的未知函数，x 仍为自变量，则方程可化为

$$\frac{dv}{dx}=a+bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+l}\right),$$

它是一个变量分离的方程. ▌

4.2　伯努里方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \tag{4.6}$$

的方程称为伯努里方程，其中 n 为常数，而且 $n\neq 0$ 和 1.

以 $\frac{(1-n)}{y^n}$ 乘方程两边，即得

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{1-n}p(x)=(1-n)q(x).$$

然后令 $z=y^{1-n}$，就有

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x),$$

这是关于未知函数 z 的一阶线性方程.

4.3　黎卡提(Riccati, 1676 — 1754) 方程

假如一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的右端函数 $f(x,y)$ 是一个关于 y 的二次多项式，则称此方程为二次方程；它可写成如下形式

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x), \tag{4.7}$$

其中函数 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 在区间 I 上连续，而且 $p(x)\neq 0$. 方程(4.7) 通常又叫作黎卡提方程. 这是形式上最简单的非线性方程.

但是，一般而言，它已不能用初等积分法求解．在下述两个定理的证明中，请读者体会初等变换的技巧．

定理 2 设已知黎卡提方程(4.7)的一个特解 $y=\varphi_1(x)$，则可用积分法求得它的通解．

证明 对方程(4.7)作变换

$$y=u+\varphi_1(x),$$

其中 u 是新的未知函数．代入方程(4.7)，得到

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dx}=p(x)[u^2+2\varphi_1(x)u+\varphi_1^2(x)]$$
$$+q(x)[u+\varphi_1(x)]+r(x),$$

由于 $y=\varphi_1(x)$ 是(4.7)的解，从上式消去相关的项以后，有

$$\frac{du}{dx}=[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)]u+p(x)u^2,$$

这是一个伯努里方程．由前面对方程(4.6)的讨论可知，此方程可以用积分法求出通解． ▌

定理 3 设黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m, \tag{4.8}$$

其中 a,b,m 都是常数，且设 $a\neq 0$．又设 $x\neq 0$ 和 $y\neq 0$．则当

$$m=0,\ -2,\ \frac{-4k}{2k+1},\ \frac{-4k}{2k-1},\quad (k=1,2,\cdots) \tag{4.9}$$

时，方程(4.8)可通过适当的变换化为变量分离的方程．

证明 不妨设 $a=1$(否则作自变量变换 $\bar{x}=ax$ 即可)．因此代替方程(4.8)，我们考虑方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=bx^m, \tag{4.10}$$

当 $m=0$ 时，(4.10)是一个变量分离的方程

$$\frac{dy}{dx}=b-y^2.$$

当 $m=-2$ 时，作变换 $z=xy$，其中 z 是新未知函数．然后代入

方程(4.10),得到

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(b+z-z^2).$$

这也是一个变量分离的方程.

当 $m=\dfrac{-4k}{2k+1}$ 时,作变换

$$x=\xi^{\frac{1}{m+1}},\quad y=\frac{b}{m+1}\eta^{-1},$$

其中 ξ 和 η 分别为新的自变量和未知函数,则(4.10)变为

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n,\tag{4.11}$$

其中 $n=\dfrac{-4k}{2k-1}$. 再作变换

$$\xi=\frac{1}{t},\quad \eta=t-zt^2,$$

其中 t 和 z 分别是新的自变量和未知函数,则(4.11)变为

$$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^l,\tag{4.12}$$

其中 $l=\dfrac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$.

方程(4.12)与(4.10)在形式上一样,只是右端自变量的指数从 m 变为 l. 比较 m 与 l 对 k 的依赖关系不难看出,只要将上述变换的过程重复 k 次,就能把方程(4.10)化为 $m=0$ 的情形.

当 $m=\dfrac{-4k}{2k-1}$ 时,微分方程(4.8)就是(4.11)的类型,因此可以把它化为微分方程(4.12)的形式,从而化归到 $m=0$ 的情形.至此定理证完. ▌

【附注 3】 上面的定理 3 是由 Johann Bernoulli 之子 Daniel Bernoulli(1700 — 1784)在 1725 年得到的.这个定理指出,对于黎卡提方程(4.8)能用初等积分法求解,条件(4.9)是充分的.实际上,时隔一百多年之后刘维尔在 1841 年进而证明了条件(4.9)还是一个必要条件.有兴趣的读者可以参阅文献[1].刘维尔的这一

工作，在微分方程的发展史上具有重要意义. 在此之前，人们把主要注意力放在微分方程的（初等积分）求解上，而刘维尔的研究结果说明，即使形式上很简单的黎卡提方程（例如$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$），一般也不能用初等积分法求解. 这就迫使人们另辟新径，例如：从理论上研究一般微分方程初值问题的解是否存在，是否唯一？怎样从微分方程本身的特点去推断其解的属性（周期性，有界性，稳定性等等）？在什么条件下可将微分方程的解用收敛的幂级数来表示？怎样求出微分方程的近似解？等等. 这就促使微分方程的研究进入一个多样化的发展时期. 本教程在随后的章节中将或多或少地涉及到上述一些论题.

【附注 4】 黎卡提方程在历史上和近代都有重要应用. 例如，它曾用于证明贝塞尔方程的解不是初等函数，另外它也出现在现代控制论和向量场分支理论的一些问题中.

习 题 2-4

1. 求解下列微分方程：

(1) $y'=\frac{2y-x}{2x-y}$;

(2) $y'=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$;

(3) $y'=\frac{x+2y+1}{2x+4y-1}$;

(4) $y'=x^3y^3-xy$.

2. 利用适当的变换，求解下列方程：

(1) $y'=\cos(x-y)$;

(2) $(3uv+v^2)du+(u^2+uv)dv=0$;

(3) $(x^2+y^2+3)\frac{dy}{dx}=2x\left(2y-\frac{x^2}{y}\right)$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

3. 求解下列微分方程：

(1) $y'=-y^2-\frac{1}{4x^2}$;

(2) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

4. 试把二阶微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

化成一个黎卡提方程.

5. 求一曲线，使得过这曲线上任意点的切线与该点向径的交角等于 45°.

6. 探照灯的反光镜（旋转面）应具有何种形状，才能使点光源发射的光束反射成平行线束？

§5. 积分因子法

在本章的 §1 中我们已看到，假若方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.1}$$

是恰当方程，即$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，则它的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

在 §2 — §4 中，我们还讨论了当(5.1)不是恰当方程时，如何把它转化为一个恰当方程的求解问题. 例如，当(5.1)具有变量分离的形式

$$X(x)Y_1(y)dx + X_1(x)Y(y)dy = 0$$

时，用 $\mu(x,y) = \frac{1}{X_1(x)Y_1(y)}$ 乘方程两侧，就得到一个恰当方程

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = 0;$$

当(5.1)是一个一阶线性方程，亦即

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0$$

时，用 $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ 乘上式两侧，就得到一个恰当方程

$$(e^{\int p(x)dx}dy + p(x)e^{\int p(x)dx}ydx) - q(x)e^{\int p(x)dx}dx = 0.$$

现在我们尝试将这种方法一般化：对一般的方程(5.1)，设法寻找一个可微的非零函数 $\mu = \mu(x,y)$，使得用它乘方程(5.1)后，所得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{5.2}$$

成为恰当方程，亦即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{5.3}$$

这时，函数 $\mu = \mu(x,y)$ 叫作方程(5.1)的一个**积分因子**.

问题是：对于给定的方程(5.1)，它的积分因子是否一定存在？如果存在，它是否容易求得？事实上，寻求积分因子 $\mu(x,y)$，就是求解偏微分方程(5.3)，或等价地，求解一阶偏微分方程

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \tag{5.4}$$

其中 P 和 Q 为已知函数，而 $\mu = \mu(x,y)$ 为未知函数. 以后我们将会知道，虽然从理论上说偏微分方程(5.4)的解是存在的，但对它的求解，又归结到对我们原来方程(5.1)的求解(见第十一章). 因此，一般而言，从(5.4)求出积分因子的表达式再去求解(5.1)是行不通的. 然而，在某些特殊情形下，利用(5.4)去寻求(5.1)的积分因子却是可行的.

例如，假设方程(5.1)有一个只与 x 有关的积分因子 $\mu = \mu(x)$，则由充要条件(5.4)推出

$$Q\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu,$$

或者

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}. \tag{5.5}$$

由于上式左端只与 x 有关，所以右端亦然. 因此，微分方程(5.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的必要条件是：表达式

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} \tag{5.6}$$

只依赖于 x，而与 y 无关.

反之，设表达式(5.6)只依赖于 x，记为 $G(x)$. 考虑到(5.5)式，

我们令

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=G(x),$$

由此得到

$$\mu(x)=e^{\int G(x)dx},\tag{5.7}$$

容易验证它就是(5.1)的一个积分因子.现在,我们把上面的讨论表述为如下定理.

定理 4　微分方程(5.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的充要条件是:表达式(5.6)只依赖于 x,而与 y 无关;而且若把表达式(5.6)记为 $G(x)$,则由(5.7)所示的函数 $\mu(x)$ 是方程(5.1)的一个积分因子. ▌

类似地,可以得出下面平行的结果.

定理 5　微分方程(5.1)有一个只依赖于 y 的积分因子的充要条件是:表达式

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)=H(y)$$

只依赖于 y;而且此时函数 $\mu(y)=e^{\int H(y)dy}$ 是方程(5.1)的一个积分因子. ▌

【例 1】　求解微分方程

$$(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0.\tag{5.8}$$

解　由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2(1-2xy),$$

所以方程(5.8)不是恰当方程.容易看出,它既不是变量分离的方程和齐次方程,也不是一阶线性方程.然而,把上面得到的等式代入(5.6)式,就得到

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{2}{x},$$

它仅依赖于 x.因此由定理 4 知,有积分因子

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}.$$

然后，以 $\mu(x)$ 乘(5.8)式，得到一个恰当方程

$$3xdx+2ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0,$$

由此可求得通积分

$$\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=C. \quad ▌$$

现在我们从另外一种观点 —— **分组求积分因子**，来看看上面的例子. 将(5.8)的左端分成两组：

$$(3x^3dx+2x^2ydy)+(ydx-xdy)=0.$$

其中第二组 $ydx-xdy$ 显然有积分因子 $\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{y^2}$ 或 $\frac{1}{x^2+y^2}$. 如果同时照顾到第一组，则 $\mu=\frac{1}{x^2}$ 乃是两组公共的积分因子，从而是方程(5.8)的积分因子.

为了使这种分组求积分因子的方法一般化，我们需要下面的定理，其证明留给读者作为练习.

定理 6 若 $\mu=\mu(x,y)$ 是方程(5.1)的一个积分因子，使得

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y),$$

则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是(5.1)的一个积分因子，其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的非零函数. ▌

以下就是对分组求积分因子法的一般化说法.

假设方程(5.1)的左端可以分成两组，即

$$(P_1\,dx+Q_1\,dy)+(P_2\,dx+Q_2\,dy)=0,$$

其中第一组和第二组各有积分因子 μ_1 和 μ_2，使得

$$\mu_1(P_1\,dx+Q_1\,dy)=d\Phi_1,\qquad \mu_2(P_2\,dx+Q_2\,dy)=d\Phi_2.$$

由定理6，对任意可微函数 g_1 和 g_2，$\mu_1g_1(\Phi_1)$ 是第一组的积分因子，而 $\mu_2g_2(\Phi_2)$ 是第二组的积分因子. 如果能适当选取 g_1 与 g_2，使得

$$\mu_1g_1(\Phi_1)=\mu_2g_2(\Phi_2),$$

则 $\mu=\mu_1g_1(\Phi_1)$ 就是方程(5.1)的一个积分因子.

【例 2】　求解微分方程

$$(x^3y-2y^2)dx+x^4dy=0.$$

解　将方程左端分组：

$$(x^3ydx+x^4dy)-2y^2dx=0. \tag{5.9}$$

前一组有积分因子$\frac{1}{x^3}$和通积分 $xy=C$；后一组有积分因子$\frac{1}{y^2}$和通积分 $x=C$. 我们要寻找可微函数 g_1 和 g_2，使

$$\frac{1}{x^3}g_1(xy)=\frac{1}{y^2}g_2(x).$$

这只要取

$$g_1(xy)=\frac{1}{(xy)^2},\quad g_2(x)=\frac{1}{x^5}.$$

从而得到原方程的积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^5y^2}.$$

然后以它乘方程(5.9)，得到

$$\frac{1}{(xy)^2}d(xy)-\frac{2}{x^5}dx=0.$$

积分此式，不难求得方程的通解

$$y=\frac{2x^3}{2Cx^4+1},$$

其中C为任意常数；外加特解 $x=0$，和 $y=0$，它们是在用积分因子乘方程时丢失的解. ▌

对于齐次方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，函数

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)} \tag{5.10}$$

是一个积分因子(见本节习题 3). 作为例子，我们用它重新求解 § 4 的例 3.

【例 3】　求解齐次方程

$$(x+y)dx-(x-y)dy=0.$$

解　由(5.10)可见，这方程有积分因子

$$\mu = \frac{1}{x(x+y) - y(x-y)} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

以它乘方程，得到

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} - \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0.$$

积分上式，得出

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C, \qquad (C > 0)$$

由此得通积分

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

读者已经看出，积分因子法可以代替本章介绍的许多方法，并且使计算简捷. 然而要掌握好这个方法，须要灵活运用本节指出的一些原则，以及有关的微积分公式和技巧，并且在练习中注意观察和思考，不断积累经验.

习 题 2-5

1. 求解下列微分方程：

(1) $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$；

(2) $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$；

(3) $(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x})dy = 0$；

(4) $ydx - (x^2 + y^2 + x)dy = 0$；

(5) $2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$；

(6) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$；

(7) $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$；

(8) $e^xdx + (e^x\operatorname{ctg}y + 2y\cos y)dy = 0$.

2. 证明方程(5.1)有形如 $\mu = \mu(\varphi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \varphi}{\partial x} - P\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = f(\varphi(x,y)),$$

并写出这个积分因子. 然后将结果应用到下述各种情形，得出存在每一种类

型积分因子的充要条件：

(1) $\mu=\mu(x\pm y)$；

(2) $\mu=\mu(x^2+y^2)$；

(3) $\mu=\mu(xy)$；

(4) $\mu=\mu(\frac{y}{x})$；

(5) $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$.

3. 证明齐次方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 有积分因子 $\mu=\frac{1}{xP+yQ}$.

4. 证明定理 6 及其逆定理：在定理 6 的假定下，若 μ_1 是微分方程(5.1)的另一个积分因子，则 μ_1 必可表为 $\mu_1=\mu g(\Phi)$ 的形式，其中函数 g 和 Φ 的意义与在定理 6 中相同.

5. 设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$ 都是连续可微的，而且 μ_1 和 μ_2 是微分方程(5.1)的两个积分因子，和 $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}\neq$ 常数. 试证 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=C$ 是方程(5.1)的一个通积分.

§6. 应用举例

在前面几节中，我们已经举出几个用微分方程解决的实际例子. 本节将再介绍几个实例，借以进一步展示一阶微分方程的一些简单应用.

【例 1】 求已知曲线族的等角轨线.

假设在 (x,y) 平面上由方程

$$\Phi(x,y,C)=0 \tag{6.1}$$

给出一个以 C 为参数的曲线族. 我们设法求出另一个曲线族

$$\Psi(x,y,K)=0, \tag{6.2}$$

其中 K 为参数，使得族(6.2)中的任一条曲线与族(6.1)中的每一条曲线相交成定角 α. 称这样的曲线族(6.2)为已知曲线族(6.1)的**等角轨线族**. 特别地，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，称曲线族(6.2)为(6.1)的**正交轨线族**.

(6.1)是一个单参数的曲线族，可以先求出它的每一条曲线

所满足的微分方程;再利用等角轨线的几何解释,得出等角轨线应满足的微分方程;然后解此方程,即得所求的等角轨线族(6.2).

具体地说,假设 $\Phi'_C \neq 0$,则可由联立方程

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \Phi'_x(x,y,C)dx + \Phi'_y(x,y,C)dy = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

消去 C,得到曲线族(6.1)所满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = H(x,y), \tag{6.4}$$

其中

$$H(x,y) = -\frac{\Phi'_x(x,y,C(x,y))}{\Phi'_y(x,y,C(x,y))},$$

这里 $C = C(x,y)$ 是由 $\Phi(x,y,C) = 0$ 决定的函数(见第一章 §1).

如果我们把方程(6.4)在点(x,y)的线素斜率记为 y_1',而把与它相交成 α 角的线素斜率记为 y',则当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y' - y_1'}{1 + y'y_1'},$$

即

$$y_1' = \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{y'\operatorname{tg}\alpha + 1};$$

这样,所求等角轨线的微分方程为

$$\frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{y'\operatorname{tg}\alpha + 1} = H(x,y),$$

亦即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H(x,y) + \operatorname{tg}\alpha}{1 - H(x,y)\operatorname{tg}\alpha}. \tag{6.5}$$

而当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,就有

$$y' = -\frac{1}{y_1'}.$$

亦即所求正交轨线的微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{H(x,y)}. \tag{6.6}$$

方程(6.5)与(6.6)中的函数 $H(x,y)$ 与(6.4)中的相同.

求解微分方程(6.5)(或(6.6)),就可以得到(6.1)的等角轨线族(或正交轨线族)(6.2).

需要注意的是,在推导方程(6.4)时,我们用了条件 $\Phi'_y(x,y,C)\neq 0$,即在点 (x,y) 附近,$\Phi(x,y,C)=0$ 决定了 y 作为 x 的单值函数.若 $\Phi'_y(x,y,C)=0$ 而 $\Phi'_x(x,y,C)\neq 0$,则可视 x 作为 y 的函数进行类似推导.其实,我们只要将微分方程(6.4),(6.5)和(6.6)改变为与之等价的对称形式,则不必要区分上述两种情形.我们把方程(6.3)的第二个方程写成对称形式,正是出于这种考虑.

等角轨线族不仅在数学本身有用(例如当 $0<\alpha<\pi$ 时,它们可以取为坐标系),而且在某些物理与力学问题中也有用,例如静电场中的电力线族与等势线族就是互为正交的.

作为一个例子,设电力线族的方程为

$$y=Kx^2,\quad (K\text{ 为参数}),$$

这是一个抛物线族(见图2-7).从联立方程

$$\begin{cases} y=Kx^2,\\ dy=2Kxdx,\end{cases}$$

中消去 K,得到一个对称形式的微分方程

$$2ydx-xdy=0.$$

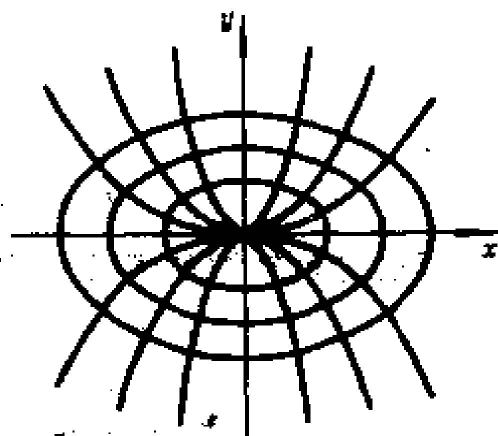


图 2-7

因此,与之正交的微分方程为

$$xdx+2ydy=0,$$

它的通积分为

$$x^2+2y^2=C^2,$$

$(C>0$ 为参数).这就是所求的等势线族(同心椭圆族). ▌

【例 2】 对我国人口总数发展趋势的估计.

人口问题是一个很复杂的生物学和社会学问题.用数学方法来研究它,目前只是一个尝试.我们在这里介绍一个比较粗糙的数学模型.令 $N(t)$ 表示某一个国家在时间 t 的人口总数.严格地说,$N(t)$ 是一个不连续的阶梯函数.但是一个人的增减与全体人数相比极为微小,我们将把 $N(t)$ 视为光滑的函数,这样就可应用微积分的方法.记 $r = r(t,N)$ 为人口增长率(出生率与死亡率之差).由于在 Δt 时间内的平均增长率为 $\frac{\Delta N}{\Delta t \cdot N}$,其中 ΔN 为人口的增量.所以

$$r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t \cdot N} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt},$$

即

$$\frac{dN}{dt} = rN. \tag{6.7}$$

这就是人口总数 N 所满足的微分方程.最简单的模型是假设 r 为常数 $k > 0$.于是容易求出初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = kN, & (6.8) \\ N(t_0) = N_0 & (6.9) \end{cases}$$

的解为

$$N = N_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{6.10}$$

这表明人口是按指数曲线增长的,这就是马尔萨斯人口论的根据.这一理论已被实践证明是错误的.

容易明了,人口的增长率是会随人口基数的增大而下降的.因此人们又提出了一个新的模型:假设

$$r = a - bN, \tag{6.11}$$

其中正的常数 a 和 b 称为生命系数.一些生态学家测得 a 的自然值为 0.029,而 b 的值则取决于各国的社会经济条件.在这一假设下,方程(6.7) 成为

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N. \tag{6.12}$$

这是一个变量分离的方程. 初值问题(6.12)+(6.9)的解为

$$N = \frac{aN_0 e^{k(t-t_0)}}{a - bN_0 + bN_0 e^{k(t-t_0)}}. \tag{6.13}$$

据文献记载,美国和法国曾用这个公式预报过人口的变化,结果是相当符合实际的;而比利时则不甚符合,这是因为当时比利时向刚果进行着大量移民. 至于这个公式是否适用于我国,还有待于实践的检验.

根据1980年5月1日公布的数字,我国人口总数在1979年底为97,092万人. 假设当时的人口增长率为1.45%,即取$t_0 = 1979$, $N_0 = 9.7092 \times 10^8$, $r_0 = 0.0145$,则由(6.11)式可得

$$bN_0 = a - r_0 = 0.029 - 0.0145 = 0.0145. \tag{6.14}$$

这样一来,可利用(6.13)式对我国的人口总数作出估算. 我们将一部分计算结果列成下表:

年(底)	1987	1988	1990	1995	2000	2020	2050	2500
人口(亿)	10.82	10.96	11.24	11.91	12.57	14.88	17.21	19.41

最近两年,我国又公布了两次人口数字:1987年7月的抽样调查结果为10.72亿(注意上表中的10.82亿是1987年底的估算值);1988年底的统计数字为10.9614亿(1989年2月19日公布). 这说明上述估算有一定的可信度. 按照这个估计,1995年底时我国人口总数将接近12亿,到2020年底时,将接近15亿,而最终趋势是19.42亿. 事实上,从(6.13)式可以看出,

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b},$$

从(6.14)式可算出b的值,再取$a = 0.029$,代入上式可得

$$\frac{a}{b} \approx 19.42(亿). \quad \blacksquare$$

【例 3】 捕食者与被捕食者的生态问题.

假设存在两个物种,前者有充足的食物和生存空间,而后者仅以前者为食物,则我们称前者为被捕食者(简称为食饵),后者为捕食者(简称为捕者). 例如农作物的害虫与它们的天敌,或海洋中的非肉食鱼与掠肉鱼都可以看成这样的两个物种.

现在我们来建立捕者与食饵之间的数学模型. 假设捕者的总数以 $x(t)$ 表示,食饵的总数以 $y(t)$ 表示(此处假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为光滑函数,如同在例 2 中所假设的那样. 并且设 $x(t) > 0$, $y(t) > 0$). 由于食饵自身的食物充足,并且有足够的生存空间,所以在不考虑捕者的情况下,其增长率为一个常数 μ (如马尔萨斯方程(6.8) 所描述的),但捕者的存在势必降低了它的增长率,且为了简单,设这种降低与捕者数量 $x(t)$ 成正比. 这样食饵的增长率为:

$$r_y = \mu - \delta x, \tag{6.15}$$

其中 μ 和 δ 为正的常数. 类似的讨论可以得出捕者的增长率为:

$$r_x = -\lambda + \sigma y, \tag{6.16}$$

其中 λ 和 σ 为正的常数. 将方程(6.7) 中的 $N(t)$ 分别取为 $x(t)$ 与 $y(t)$,并将其中的增长率 r 分别以(6.16) 和(6.15) 来表示,就得到捕者与食饵所满足的微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(-\lambda + \sigma y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(\mu - \delta x). \end{cases} \tag{6.17}$$

到目前为止,我们还没有介绍微分方程组的求解法. 但观察(6.17) 中的两个方程,发现右端都与 t 无关. 这启发我们把这两个方程相除,得到只含变量 x 与 y 的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\mu - \delta x)}{x(-\lambda + \sigma y)}. \tag{6.18}$$

这是一个变量分离的方程,它可以化为

$$(-\frac{\lambda}{y} + \sigma)dy = (\frac{\mu}{x} - \delta)dx,$$

由此积分后，得到方程(6.18)的通积分为

$$H(x,y) \equiv \delta x + \sigma y - \mu \ln x - \lambda \ln y = h, \tag{6.19}$$

其中 h 为任意常数.

为了在平面 (x,y) 上作出曲线族(6.19)的图形，我们可以把它看成三维空间 (x,y,z) 中的曲面 $z = H(x,y)$ 与平面 $z = h$ 的截痕在平面 (x,y) 上的投影. 容易看出

(1) $\lim\limits_{x \to 0+} H(x,y) = +\infty$， $\lim\limits_{y \to 0+} H(x,y) = +\infty$，以及

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to \infty \\ (x>0,y>0)}} H(x,y) = +\infty;$$

(2) 函数 $H(x,y)$ 在 $x>0, y>0$ 时有唯一的逗留点 $(\bar{x},\bar{y})$：

$$\bar{x} = \frac{\mu}{\delta}, \quad \bar{y} = \frac{\lambda}{\sigma}, \tag{6.20}$$

亦即 $(\bar{x},\bar{y})$ 是在第一象限满足 $H'_x(x,y) = H'_y(x,y) = 0$ 的唯一点，而且它是 $H(x,y)$ 在第一象限的最小值点；

(3) $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{x^2} > 0$， $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \dfrac{\lambda}{y^2} > 0$.

因此，可以推出曲线族(6.19)在平面 (x,y) 上是一族互不相交的封闭曲线 $\{\Gamma_h\}$，它们围绕着点 $(\bar{x},\bar{y})$.

如果考虑到原方程组(6.17)，例如其中的第一个方程：

$$\frac{dx}{dt} = \sigma x\left(y - \frac{\lambda}{\sigma}\right),$$

则可得到结论：当 $y > \bar{y}$ 时，$x(t)$ 是 t 的增函数；当 $y < \bar{y}$ 时，$x(t)$ 是 t 的减函数. 同理，由(6.17)的第二个方程可知：当 $x > \bar{x}$ 时，$y(t)$ 是 t 的减函数；当 $x < \bar{x}$ 时，$y(t)$ 是 t 的增函数. 这样，我们可以在 Γ_h 上用箭头标出 $x(t)$ 与 $y(t)$ 随 t 变化的趋势(见图 2-8).

对于(在允许范围内)给定的一个 h 值，即对于给定的初条件 $x(0)$ 与 $y(0)$，$x(t)$ 与 $y(t)$ 沿闭曲线 Γ_h 作周期性的变化：随着食饵 $y(t)$ 的增减，捕者 $x(t)$ 作"滞后"的增减. 具体地说，假定以 Γ_h 上的点 A 为一个初始状态，则随着时间 t 的增长，在 Γ_h 上的 $\widehat{AB}$ 段，$x(t)$

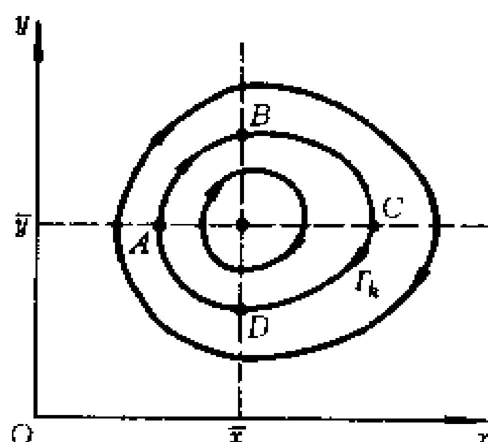


图 2-8

与 $y(t)$ 都在增长. 但捕者的增长，势必引起食饵的减少趋势，因此一定时间以后(即图 2-8 中的 B 点所对应的状态以后)，食饵 $y(t)$ 开始减少. 这种减少在初期还没有立即引起捕者 $x(t)$ 的减少. 事实上，在 $\widehat{BC}$ 段，$x(t)$ 还在增长，这就是上述的滞后现象. 然而食饵的减少最终导致了捕者 $x(t)$ 的减少，这就是 $\widehat{CD}$ 段所反映的规律. 当 $x(t)$ 的减少持续到一定程度(D 点)，食饵 $y(t)$ 开始回升，然而捕者的减少还要有一定的"滞后"期，直到状态 A. 随后将开始这种变化的新一轮循环.

应该指出的是，依初值条件的不同(即相应于不同的 h 值)，$x(t)$ 与 $y(t)$ 在不同的闭曲线 Γ_h 上取值，因而在周期变化中增减的幅度有所不同. 然而反映这两个物种变化的平均值都分别是 $[x] = \bar{x}$ 和 $[y] = \bar{y}$.

事实上，设 Γ_h 的周期为 T_h，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的平均值分别为

$$[x] = \frac{1}{T_h}\int_0^{T_h} x(t)dt \quad 和 \quad [y] = \frac{1}{T_h}\int_0^{T_h} y(t)dt.$$

由方程(6.17)推出

$$\frac{dx}{x} = (-\lambda + \sigma y)dt, \quad \frac{dy}{y} = (\mu - \delta x)dt.$$

再从 0 到 T_h 积分，就可推出 $[x] = \frac{\mu}{\delta} = \bar{x}$ 和 $[y] = \frac{\lambda}{\sigma} = \bar{y}$. 这里我们已用到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的周期为 T_h，例如

$$\int_0^{T_h} \frac{dx(t)}{x(t)} = \ln\frac{x(T_h)}{x(0)} = \ln 1 = 0.$$

现在我们考虑对这两个物种同时进行的一个外加的捕捉行为，则方程组(6.17)变为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[-(\lambda+\varepsilon)+\alpha y], \\ \dfrac{dy}{dt} = y[(\mu-\varepsilon)-\delta x]. \end{cases} \tag{6.21}$$

当捕捉量不很大(即 $\mu-\varepsilon>0$)时,(6.21)与(6.17)描述的是同样的规律.因此,对于(6.21),相应的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的平均量变为

$$\bar{x} = \frac{\mu-\varepsilon}{\delta}, \quad \bar{y} = \frac{\lambda+\varepsilon}{\alpha}. \tag{6.22}$$

从(6.22)式容易看出,随着外加捕捉行为的增大(即 ε 增大),捕者的平均量 $\bar{x}$ 减小,而被捕食者的平均量 $\bar{y}$ 上升.换句话说,小量的外加捕捉行为对原来的捕食者不利.

现在看看这种理论上的结果有什么实际意义.假设我们考察的两个物种是农作物的害虫和它们的天敌.如果施用少量的农药,其结果将造成天敌的平均量减少,而害虫的平均量上升.这说明与其施用少量农药,不如采用生物治虫的办法.

方程(6.17)的产生还有一段历史上的故事:本世纪二十年代,意大利生物学家 D'Ancona 在研究爱琴海中相互制约的鱼类的数量变化时,从统计数字中发现,第一次世界大战期间掠肉鱼(如鲨鱼等)的捕获量所占的比例增大了.他无法解释这个现象,便请教数学家 Volterra.后者就用上述方法给出了令人满意的解释:第一次世界大战期间,捕鱼业受到影响.而外加捕捉行为的减少(ε 下降)使得捕食者 $x(t)$ 的平均量上升(见(6.22)式).因而在捕获物中掠肉鱼的比例增加了.由于这段历史,在生物数学中大家把方程(6.17)叫作 Volterra 方程. ▌

习 题 2-6

1. 求下列各曲线族的正交轨线族:

(1) $x^2+y^2=Cx$;

(2) $xy=C$;

(3) $y^2=ax^3$;

(4) $x^2 + C^2y^2 = 1$.

2. 求与下列各曲线族相交成 45° 角的曲线族：

(1) $x - 2y = C$;

(2) $xy = C$;

(3) $y = x\ln ax$;

(4) $y^2 = 4ax$.

3. 给定双曲线族 $x^2 - y^2 = C$（其中 C 是任意常数）. 设有一个动点 P 在平面 (x,y) 上移动，它的轨迹与和它相交的每条双曲线均成 30° 角，又设此动点从 $P_0(0,1)$ 出发，试求这动点的轨迹.

*4. 追线：设在 xOy 平面上，有某物 P 从原点 O 出发，以常速 $a>0$ 沿 x 轴的正方向运动. 同时又有某物 Q 以常速 b 从点 $(0,1)$ 出发追赶 P. 设 $b>a$，且 Q 的运动方向永远指向 P. 试求 Q 的运动轨迹，以及追上 P 的时间.

5. 逃逸速度：假设地球的半径为 $R = 6,437$ 公里，地面上的重力加速度为 $g = 9.8$ 米 / 秒^2，又设质量为 m 的火箭在地面以初速 v_0 垂直上升. 假设不计空气阻力和其它任何星球的引力. 试求火箭的逃逸速度，即：使火箭一去不复返的最小初速度 v_0.

6. 设某社会的总人数为 N，当时流行一种传染病，得病人数为 x. 设传染病人数的扩大率与得病人数和未得病人数的乘积成正比. 试讨论传染病人数的发展趋势，并以此解释对传染病人进行隔离的必要性.

第三章 存在和唯一性定理

我们在第二章讨论了一阶微分方程的初等积分法，解决了几类特殊的方程．但是，我们也知道，对许多微分方程，例如形式上很简单的黎卡提方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$，不能通过初等积分法求解．这就产生一个问题：一个不能用初等积分法求解的微分方程是否意味着没有解呢？或者说，一个微分方程在何种条件下一定有解呢？当有解时，它的初值问题有多少解呢？毫无疑问，这是一个十分基本的问题．不解决这个问题，对微分方程的进一步研究（无论是定性的还是定量的）就无从谈起．

柯西（Cauchy，1789－1857）在十九世纪二十年代第一个成功地建立了微分方程初值问题解的存在和唯一性定理（因此，后人把初值问题称为柯西问题）．1876年，李卜西兹（Lipschitz，1832－1903）减弱了柯西定理的条件．1893年，毕卡（Picard，1856－1941）用逐次逼近法在李卜西兹条件下对定理给出了一个新证明．此外，皮亚诺（Peano．1858－1932）在更一般的条件下建立了柯西问题解的存在性定理（不顾及唯一性）．

本章主要介绍毕卡定理和皮亚诺定理，并介绍解的延伸和解的最大存在区间等有关问题．

§1． 毕卡存在和唯一性定理

本节将利用毕卡的逐次迭代法，来证明微分方程初值问题解的存在和唯一性定理．

为此，我们首先介绍一个条件．设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足

不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中常数 $L>0$. 则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足**李卜西兹条件**(或简称**李氏条件**).

易知,若函数 $f(x,y)$ 在凸形区域 D 内对 y 有连续的偏微商(这正是柯西当年建立微分方程初值问题解的存在和唯一性定理时所假设的一个条件),则 $f(x,y)$ 在 D 内对 y 满足李氏条件;反之,结论不一定正确. 例如,$f(x,y)=|y|$ 对 y 满足李氏条件,但当 $y=0$ 时它对 y 没有微商.

现在,我们要证明下述毕卡定理.

定理 1 设初值问题

$$(E):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R:\qquad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

内连续,而且对 y 满足李氏条件. 则(E)在区间 $I=[x_0-h,\ x_0+h]$ 上有并且只有一个解,其中常数

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right),\quad 而\quad M>\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

证明 为了突出思路,我们把证明分成以下四步:

(一) 初值问题 (E) 等价于积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx. \tag{1.1}$$

事实上,设 $y=y(x)$ $(x\in I)$ 是 (E) 的解,则有

$$y'(x)\equiv f(x,y(x)),\quad (x\in I) \tag{1.2}$$

和

$$y(x_0)=y_0. \tag{1.3}$$

由此,对恒等式(1.2)积分并利用初值条件(1.3),得到

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx,\quad (x\in I)$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程(1.1)的解.

反之,设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是(1.1)的解,则只要逆转上面的推导就可知道 $y = y(x)$ 是 (E) 的解.

因此,我们只需要证明积分方程(1.1)在区间 I 上有且只有一个解.

(二)　用逐次迭代法构造毕卡序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx, \quad (x \in I) \tag{1.4}$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$,其中 $y_0(x) = y_0$.

当 $n = 0$ 时,注意到 $f(x, y_0(x))$ 是 I 上的连续函数,所以由(1.4)可见

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx, \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的,而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0(x))| dx \right| \leqslant M|x - x_0|. \tag{1.5}$$

这就是说,在区间 I 上 $|y_1(x) - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$.

因此,$f(x, y_1(x))$ 在 I 上是连续的. 所以由(1.4)可见

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx, \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的,而且满足不等式

$$|y_2(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x))| dx \right| \leqslant M|x - x_0|,$$

从而在区间 I 上 $|y_2(x) - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$.

如此类推,用归纳法可证:由(1.4)给出的毕卡序列 $y = y_n(x)$ 在 I 上是连续的,而且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|,$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(三)　现证毕卡序列 $y = y_n(x)$ 一致收敛到(1.1)的解

注意,序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n-1}(x) - y_n(x)] \tag{1.6}$$

的收敛性. 下面证明级数(1.6)在 I 上是一致收敛的. 为此,我们用归纳法证明不等式

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.7}$$

在 I 上成立($n = 0,1,2,\cdots$).

事实上,当 $n = 0$ 时由(1.5)可知(1.7)成立.

假设当 $n = k$ 时(1.7)成立. 先由(1.4)推出

$$|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_{k+1}(x)) - f(x,y_k(x))]dx\right|.$$

再利用李氏条件和归纳法假设,我们得到

$$\begin{aligned}|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_{k+1}(x) - y_k(x)|dx\right| \\ &\leqslant M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}dx\right| \\ &= \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!},\end{aligned}$$

即,当 $n = k+1$ 时(1.7)也成立. 因此,(1.7)得证.

显然,不等式(1.7)蕴含级数(1.6)在区间 I 上是一致收敛的. 因此,毕卡序列 $y = y_n(x)$ 是一致收敛的. 则极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \quad (x \in I)$$

在区间 I 上是连续的. 然后利用 $f(x,y)$ 的连续性和毕卡序列的一致收敛性,我们在(1.4)中令 $n \to \infty$ 就得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad (x \in I)$$

即, $y = \varphi(x)$ 在 I 上是积分方程(1.1)的一个解.

(四) 最后证明唯一性

设积分方程(1.1)有二个解分别为 $y = u(x)$ 和 $y = v(x)$. 令 $J = [x_0 - d, x_0 + d]$ 为它们的共同存在区间,其中 d 为某一正数,

$(d \leqslant h)$. 则由(1.1)推出

$$u(x) - v(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x,u(x)) - f(x,v(x))]dx, \quad (x \in J).$$

再利用李氏条件，我们得到

$$|u(x) - v(x)| \leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |u(x) - v(x)|dx\right|. \tag{1.8}$$

注意，在区间 J 上，$|u(x) - v(x)|$ 是连续有界的. 因此可取它的一个上界 K. 则由(1.8)可见

$$|u(x) - v(x)| \leqslant LK|x - x_0|.$$

然后，把它代入(1.8)的右端，我们推出

$$|u(x) - v(x)| \leqslant K\frac{(L|x - x_0|)^2}{2}.$$

如此递推，我们可用归纳法得到

$$|u(x) - v(x)| \leqslant K\frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}, \quad (x \in J).$$

然后，令 $n \to \infty$，则上面不等式的右端趋于零. 因此，我们推出

$$u(x) = v(x), \quad (x \in J).$$

这就是说，积分方程(1.1)的解是唯一的.

定理 1 的证明到此结束. ▌

有了毕卡定理，对于一般微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1.9}$$

只要能判别函数 $f(x,y)$ 在某个区域 D 内连续并且对 y 有连续的偏微商(或满足李氏条件)，我们就可断言在区域 D 内经过每一点有并且只有一个解.

例如，黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

虽不能用初等积分法求解，但由毕卡定理容易知道它在(x,y)平面上经过每一点有且只有一个解.

一般而言，如果函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，而对 y 不满足李氏条件，那么微分方程(1.9)在 G 内经过每一点仍有一个解(即皮亚诺存在定理，见 §2)，但这解可能是唯一的，也可能不是唯一的(参考本节习题1)．也就是说，李氏条件只是解的唯一性的一个充分条件．在微分方程的一般理论中还没有保证解的唯一性的一种充要条件．因此，时至今日还有人研究这方面的问题．下面我们介绍一个比李氏条件更广泛的条件．

设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|),$$

其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数，而且瑕积分

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty,\quad (\text{常数 } r_1>0).$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足 **Osgood 条件．**

注意，李氏条件是 Osgood 条件的特例，这是因为 $F(r)=Lr$ 满足上述要求．

现在，我们把最先由美国数学家 Osgood 证明的有关解的一个唯一性定理叙述如下．

定理 2 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件，则微分方程(1.9)在 G 内经过每一点都最多只有一个解．

证明 假设不然．则在 G 内可以找到一点 (x_0,y_0) 使得方程(1.9)有两个解 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 都经过 (x_0,y_0)，而且至少存在一个值 $x_1\neq x_0$，使得 $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$．不妨设 $x_1>x_0$，且 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$．令

$$\bar{x}=\sup\{x\in[x_0,x_1]:\ y_1(x)=y_2(x)\}.$$

则显然有 $x_0\leqslant\bar{x}<x_1$，而且

$$r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\qquad \text{当 } \bar{x}<x\leqslant x_1,$$

和 $r(\bar{x})=0$．因此，我们有

$$\begin{aligned}r'(x)&=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\\&\leqslant F(|y_1(x)-y_2(x)|)=F(r(x)),\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leqslant dx, \quad (\bar{x} < x \leqslant x_1).$$

从 $\bar{x}$ 到 x_1 积分上式，得到

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leqslant x_1 - \bar{x},$$

其中 $r_1 = r(x_1) > 0$. 但这不等式的左端是 ∞，而右端是一个有限的数. 因此，这是一个矛盾，它证明了我们的定理. ▌

最后，我们还要指出：如果没有李氏条件，那么一般也不能保证毕卡序列的收敛性. 请看下面 Müller 的反例.

【例 1】　设初值问题

$$(E_0): \qquad \frac{dy}{dx} = F(x,y), \quad y(0) = 0,$$

其中函数

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0,\ -\infty < y < \infty; \\ 2x, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1,\ -\infty < y < 0; \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < x^2; \\ -2x, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y < \infty. \end{cases}$$

容易验证，函数 $F(x,y)$ 在条形区域

$$S: \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad -\infty < y < \infty$$

内是连续的，可是对 y 不满足李氏条件.

对于初值问题(E_0)，我们有毕卡序列

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x F(x, y_n(x))dx, \quad (y_0(x) = 0),$$

$(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $n = 0,1,2,\cdots$；因此，容易推出

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} x^2, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

$(n = 1,2,\cdots)$. 由此可见，初值问题(E_0) 的毕卡序列是不收敛的.

另外，可以验证 $y = \frac{1}{3}x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 是(E_0)的解；而且只要利用 $F(x,y)$ 关于 y 的递减性就可证明(E_0) 的解是唯一的（见本节

习题 3)．但是，(E_0) 的毕卡序列和它的任何子序列都不能充分近(E_0) 的解．这就是说，对初值问题(E_0) 的求解，毕卡逐次迭代是无效的． ▌

习 题 3-1

1. 利用 Osgood 条件讨论下列微分方程满足初值条件 $y(0)=0$ 的解的唯一性问题：

(1) $\frac{dy}{dx}=|y|^{\alpha}$，（常数 $\alpha>0$）；

(2) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0, & 当\ y=0,\\ y\ln|y|, & 当\ y\neq 0.\end{cases}$

2. 试求初值问题：

$$\frac{dy}{dx}=x+y+1,\quad y(0)=0,$$

的毕卡序列，并由此取极限求解．

*3. 设连续函数 $f(x,y)$ 对 y 是递减的，则初值问题(E) 的右侧解是唯一的．（左侧解是否唯一？能举一个反例吗？）

* § 2. 皮亚诺存在定理

本节旨在放宽有关微分方程解的存在定理的条件．简言之，在毕卡定理中如果只假定 $f(x,y)$ 在 R 内的连续性，那么用下文介绍的欧拉序列仍可证明初值问题(E) 的解在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是存在的（但不一定是唯一的）．这就是本节要介绍的皮亚诺定理．

为此，需要先做一些准备工作．

2.1 欧拉折线

早在十八世纪，欧拉就依据微分方程的几何解释（见第一章的 § 2），提出用简单的折线来近似地描绘所要寻求的积分曲线——后人称这种方法为欧拉折线法．它标志了微分方程近似计算方法的开端．

设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{2.1}$$

和相关的初值问题

$$(E):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 是在矩形区域

$$R:\qquad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

内给定的连续函数．令正数 M 为 $|f(x,y)|$ 在 R 上的一个上界．则微分方程(2.1)在 R 内各点 P 的线素 $l(P)$ 的斜率界于 $-M$ 和 M 之间．由此不难推出：若 $y=y(x)$ 是初值问题(E)的一个解，则它满足不等式

$$|y(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|.$$

为了保证积分曲线 $y=y(x)$ 不越出矩形 R，须作下面的限制：

$$M|x-x_0|\leqslant b,\quad 亦即\quad |x-x_0|\leqslant\frac{b}{M}.$$

因此，令

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),$$

则在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上(E)的积分曲线 Γ 停留在 R 内．事实上，它停留在 R 内的一个扇形区

$$\Delta_h:\qquad |x-x_0|\leqslant h,\quad |y-y_0|\leqslant M|x-x_0|,$$

见图 3-1.

现在，把区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 分成 $2n$ 等份．则每等份的长度为 $h_n=h/n$，而 $2n+1$ 个分点为

$$x_k=x_0+kh_n,\quad (k=0,\pm1,\cdots,\pm n).$$

注意，x_{-n} 和 x_n 为区间的两个端点．

其次，从初值点 $P_0(x_0,y_0)$ 出发先向右作折线如下．

延长在 P_0 的线素 $l(P_0)$，使它与垂线 $x=x_1$ 交于点 $P_1(x_1,y_1)$．则由线素的定义(第一章 §2)可知

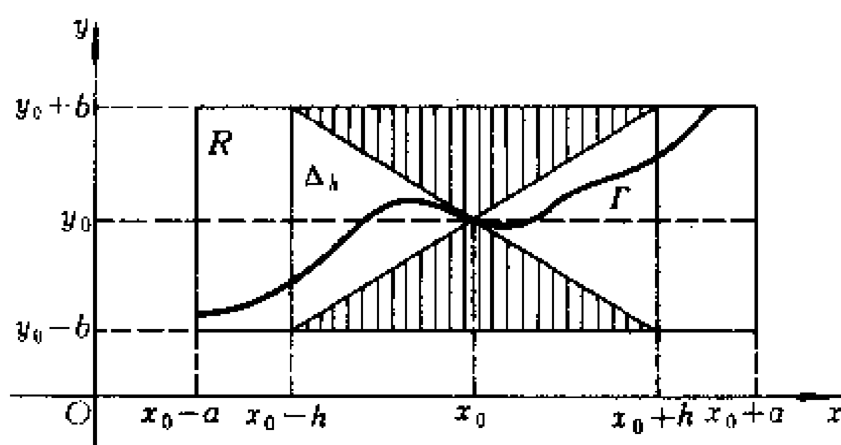


图 3-1

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

取直线段$[P_0, P_1]$作为折线的第一段，易知它停留在扇形区 Δ_h 内；再在 P_1 点延长线素 $l(P_1)$，使它与垂线 $x = x_2$ 相交于点 $P_2(x_2, y_2)$. 则有

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

取直线段$[P_1, P_2]$作为折线的第二段，易知它停留在扇形区 Δ_h 内；如此类推，我们在 P_0 点的右侧作出一条折线

$$[P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n] \subset \Delta_h.$$

用相同的方法，从 P_0 点出发再向左作出一条折线

$$[P_{-n}, \cdots, P_{-2}, P_{-1}, P_0] \subset \Delta_h.$$

然后，就在 Δ_h 内得到一条连续的折线

$$\gamma_n = [P_{-n}, \cdots, P_{-k}, \cdots, P_{-1}, P_0, P_1, \cdots, P_k, \cdots, P_n],$$

其中 P_k 的坐标为(x_k, y_k)，和

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1});$$

而 P_{-k} 的坐标为(x_{-k}, y_{-k})，和

$$y_{-k} = y_{-k+1} + f(x_{-k+1}, y_{-k+1})(x_{-k} - x_{-k+1}),$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$. 称 γ_n 为**欧拉折线**.

令欧拉折线 γ_n 的表达式为

$$y = \varphi_n(x), \quad (|x - x_0| \leqslant h). \tag{2.2}$$

当 $x_0 < x \leqslant x_0 + h$ 时，则有整数 s，使得

$$x_s < x \leqslant x_{s+1}, \quad (0 \leqslant s \leqslant n-1).$$

由此不难推出欧拉折线的计算公式

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_s, y_s)(x - x_s). \tag{2.3}$$

同理，当 $x_0 - h \leqslant x < x_0$ 时，可推出

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{-s+1} f(x_k, y_k)(x_{k-1} - x_k) + f(x_{-s}, y_{-s})(x - x_{-s}). \tag{2.4}$$

从线素场的几何意义可以看出，把上述欧拉折线 $y = \varphi_n(x)$ 作为初值问题(E) 的一个近似解是合理的．而且可以猜想：只要增大 n，就能提高近似的精度．这在理论上须要证明欧拉折线 $y = \varphi_n(x)$ 在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上是收敛的（或至少有一个收敛的子序列），而且收敛到初值问题(E) 的解．但是，由于在欧拉时代的数学分析还没有足够严格的基础，所以欧拉未能解决这个收敛性问题．现在，我们可以讨论一个函数序列在什么条件下有收敛的子序列的问题．

2.2　Ascoli 引理

设在区间 I 上给定一个函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \tag{2.5}$$

如果存在常数 $K > 0$，使得不等式

$$|f_n(x)| < K, \quad (x \in I),$$

对一切 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立，则称函数序列(2.5)在区间 I 上是**一致有界**的．

如果对任意的正数 ε，存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$，使得只要 $x_1, x_2 \in I$

和 $|x_1 - x_2| < \delta$. 就有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon, \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则称函数序列(2.5)是**等度连续**的.

例如,函数序列

$$f_n(x) = (-1)^n + x^n, \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{2.6}$$

在区间 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 上是一致有界和等度连续的;在区间 $|x| \leqslant 1$ 上是一致有界但非等度连续的;而在区间 $|x| \leqslant 2$ 上既不是一致有界又不是等度连续的.

Ascoli 引理　设函数序列(2.5)在有限闭区间 I 上是一致有界和等度连续的,则可以选取它的一个子序列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \cdots, f_{n_k}(x), \cdots$$

使它在区间 I 上是一致收敛的.

证明见[3]或[7]. ∎

2.3　皮亚诺存在定理

我们先证明两个引理.

引理 1　欧拉序列(2.2)在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上至少有一个一致收敛的子序列.

证明　在 2.1 中我们已经指出,所有欧拉折线 γ_n 都停留在矩形区域 R 内. 因此,

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant b, \quad (|x - x_0| \leqslant h),$$

$(n = 1,2,\cdots)$. 这就是说,欧拉序列(2.2)是一致有界的.

其次,注意折线 γ_n 的各个直线段的斜率界于 $-M$ 和 M 之间,其中 M 为 $|f(x,y)|$ 在 R 的一个上界. 因此,容易证明折线 γ_n 的任何割线的斜率也界于 $-M$ 和 M 之间;亦即

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \leqslant M|s - t|, \quad (n = 1,2,\cdots),$$

其中 s 和 t 是区间$[x_0 - h, x_0 + h]$内的任何两点. 由此可见,序列(2.2)也是等度连续的.

因此，由 Ascoli 引理直接完成了引理 1 的证明. ▌

引理 2　欧拉折线 $y=\varphi_n(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上满足关系式

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x), \tag{2.7}$$

其中函数 $\delta_n(x)$ 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=0,\quad (|x-x_0|\leqslant h). \tag{2.8}$$

证明　我们只考虑右侧的情形：$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$. 对于左侧的情形可作类似的讨论.

利用恒等式

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)\equiv\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x_i,y_i)dx,$$

就可得到

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,\varphi_n(x))dx+d_n(i),$$

其中

$$d_n(i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))]dx,$$

$(i=0,1,\cdots,s-1)$；同样对于 $x_s<x\leqslant x_{s+1}$，可得

$$f(x_s,y_s)(x-x_s)=\int_{x_s}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+d_n^*(x),$$

其中

$$d_n^*(x)=\int_{x_s}^{x}[f(x_s,y_s)-f(x,\varphi_n(x))]dx.$$

因此，可把(2.3)写成如下形式

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x),$$

其中

$$\delta_n(x)=\sum_{i=0}^{s-1}d_n(i)+d_n^*(x).$$

另一方面，根据欧拉折线的构造，可知不等式

$$|x-x_i| \leqslant \frac{h}{n}, \quad |\varphi_n(x)-y_i| \leqslant M|x-x_i| \leqslant \frac{Mh}{n}$$

在区间 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 上成立．因此，只要利用 $f(x,y)$ 的连续性，我们就可以推出如下结论：

任给正数 ε，存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得

$$|f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}),$$

只要 $n>N$．

这样一来，就有

$$|d_n(i)| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))|dx$$

$$< \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{h}dx = \frac{\varepsilon}{n},$$

只要 $n>N$；同样，由于 $x_s < x \leqslant x_{s+1}$，我们有

$$|d_n^*(x)| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad 只要\ n>N.$$

由此推出

$$|\delta_n(x)| < \frac{s\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \varepsilon, \quad 只要\ n>N.$$

这就证明了(2.8)．引理2从而得证．▌

现在，容易证明下述皮亚诺的存在定理．

定理 3 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内连续，则初值问题

$$(E): \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0,$$

在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上至少有一个解 $y=y(x)$，这里矩形区域 R 和正数 h 的定义同定理1．

证明 利用引理1，我们可以选取欧拉折线序列(2.2)的一个子序列

$$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \cdots, \varphi_{n_k}(x), \cdots$$

使它在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛. 则极限函数

$$\varphi(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是连续的.

再利用引理 2, 由(2.7)可知

$$\varphi_{n_k}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_{n_k}(x))dx+\delta_{n_k}(x);$$

令 $k\to\infty$, 则由 φ_{n_k} 的一致收敛性和 $f(x,y)$ 的连续性, 以及(2.8)推出

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))dx,\quad(|x-x_0|\leqslant h).$$

这就证明了 $y=\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是(E)的一个解. 定理 3 从而得证. ▌

【附注 1】 由上述皮亚诺定理的证明可知, 初值问题(E)的欧拉序列的任何一致收敛子序列都趋于(E)的某个解. 因此, 如果(E)的解是唯一的, 那么它的欧拉序列就一致收敛到那个唯一的解. 另外, 我们从 §1 例 1 (Müller 之例)看到, 对于初值问题(E)的毕卡序列就不具有欧拉序列的上述性质. 从这个意义上讲, 欧拉序列似乎比毕卡序列合理.

【附注 2】 皮亚诺定理在相当广泛的条件(即, 只要求函数 $f(x,y)$ 的连续性)下保证了初值问题解的存在性, 而不保证唯一性. 在本世纪三十年代, 苏联数学家拉甫仑捷夫(Лаврентьев)曾在矩形区域 R 内构造了一个连续函数 $F(x,y)$, 使得对应的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

在 R 内经过每一点至少有二条不同的积分曲线. 人们称这种复杂的现象为拉甫仑捷夫现象.

如果微分方程在区域 G 内每一点都满足解的存在和唯一性条件, 那么积分曲线族在局部范围内的结构却非常简单 —— 局部等价于一族平行直线. 这一点在几何上很容易想象, 而严格的分析证

明可见第五章 § 3.

【附注 3】 一般说来，如果不要求 $f(x,y)$ 的连续性，那么上面的初值问题(E) 可能是无解的. 例如，设函数

$$f^*(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}\quad 1\leqslant |x+y|<\infty;\\ (-1)^n, & \text{当}\quad \frac{1}{n+1}\leqslant |x+y|\leqslant \frac{1}{n},(n=1,2,\cdots);\\ 0, & \text{当}\quad |x+y|=0.\end{cases}$$

则用反证法易证初值问题

$$(E^*):\qquad \frac{dy}{dx}=f^*(x,y),\quad y(0)=0$$

没有(连续的)解.

习 题 3-2

1. 利用 Ascoli 引理证明下面的结论：

设一函数序列在有限区间 I 上是一致有界和等度连续的，则在 I 上它至少有一个一致收敛的子序列.

2. 试举例说明，当 I 是无限区间时上面的结论不成立.

3. 毕卡序列满足 Ascoli 引理的条件；能用毕卡序列来证明皮亚诺的存在定理吗？试说明理由.

* 4. 对于与初值问题(E) 等价的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx,$$

在区间 $I=[x_0,x_0+h]$ 上(其中正数 h 的意义同定理 3) 构造序列 $y_n(x)$ 如下：任给正整数 n，令 $x_k=x_0+kd_n$，其中 $d_n=h/n$，$k=0,1,\cdots,n$. 则分点

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n(=x_0+h)$$

把区间 I 分成 n 等份. 我们从 $[x_0,x_1]$ 到 $[x_1,x_2]$，再从 $[x_1,x_2]$ 到 $[x_2,x_3]$，…，最后从 $[x_{n-2},x_{n-1}]$ 到 $[x_{n-1},x_0-h]$ 递推地定义下面的函数

$$y_n(x)=\begin{cases}y_0, & \text{当 } x\in[x_0,x_1];\\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n}f(x,y_n(x))dx, & \text{当 } x\in[x_1,x_0+h].\end{cases}$$

我们称序列

$$y_1(x),\ y_2(x),\cdots,\ y_n(x),\cdots$$

$(x\in I)$ 为 Tonelli 序列.

试利用 Ascoli 引理从 Tonelli 序列来证明皮亚诺定理.

* 5. 令函数

$$\alpha(x)=\int_0^x e^{-1/x^2}dx,\quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

其中规定 $\alpha(0)=0$. 再在条形区域

$$G:\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<y<\infty$$

上定义一个连续的函数 $f^*(x,y)$，使得它满足条件：

$$f^*(x,y)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad y>\alpha(x);\\ x\cos\dfrac{\pi}{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad y=0;\\ -x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad y<-\alpha(x).\end{cases}$$

然后考虑初值问题

$$(E^*):\qquad \frac{dy}{dx}=f^*(x,y),\quad y(0)=0.$$

我们把区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分成 n 等份，再仿本节2.1段中的方法可以得到一条欧拉折线 $y=\varphi_n{}^*(x)$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$. 试证明：

$$\begin{cases}\text{若 } n \text{ 为偶数，则 } \varphi_n{}^*(x)\geqslant\alpha(x), & \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1;\\ \text{若 } n \text{ 为奇数，则 } \varphi_n{}^*(x)\leqslant-\alpha(x), & \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

因此，这欧拉序列 $y=\varphi_n{}^*(x)$ 当 $n\to\infty$ 时是不收敛的[从而 (E^*) 的解是不唯一的].

§ 3.　解 的 延 伸

在上面我们只满足于在局部范围内讨论初值问题解的存在性. 本节准备把这种讨论扩大到整体.

设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{3.1}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续. 因此，我们可以利用上节的皮

亚诺定理推出：对于区域 G 内任何一点 $P_0(x_0,y_0)$，微分方程(3.1)至少有一个解 $y=\varphi(x)$ 满足初值条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{3.2}$$

其中 $y=\varphi(x)$ 的存在区间为 $|x-x_0|\leqslant h$，而正数 h 与初值点 P_0 的邻域 R 有关. 因此，我们只知道上面的解在局部范围内是存在的. 现在，我们要讨论这解在大范围内的存在性. 主要的结果为下述解的延伸定理.

定理4 设 P_0 为区域 G 内任一点，并设 Γ 为微分方程(3.1)经过 P_0 点的任一条积分曲线. 则积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界[换句话说，对于任何有界闭区域 G_1，($P_0\in G_1\subset G$)，积分曲线 Γ 将延伸到 G_1 之外].

证明 设微分方程(3.1)经过 P_0 的解 Γ 有如下表达式

$$\Gamma:\qquad y=\varphi(x),\quad (x\in J),$$

其中 J 表示 Γ 的**最大存在区间**.

先讨论积分曲线 Γ 在 P_0 点右侧的延伸情况. 令 J^+ 为 Γ 在 P_0 点右侧的最大存在区间，即 $J^+=J\cap[x_0,\infty)$.

如果 $J^+=[x_0,\infty)$，那么积分曲线 Γ 在 G 内就延伸到无限远；从而延伸到区域 G 的边界. 否则，我们就有下面两种可能：

(1) J^+ 是有限闭区间.

令 $J^+=[x_0,x_1]$，其中常数 $x_1>x_0$. 注意，当 $x\in J^+$ 时，积分曲线 Γ 停留在区域 G 内. 令 $y_1=\varphi(x_1)$，则 $(x_1,y_1)\in G$.

因为区域 G 是一个开集，所以存在矩形区域

$$R_1:\qquad |x-x_1|\leqslant a_1,\quad |y-y_1|\leqslant b_1,$$

使得 $R_1\subset G$. 在矩形区域 R_1 内我们可以利用定理3推出，微分方程(3.1)至少有一个解

$$y=\varphi_1(x),\quad (|x-x_1|\leqslant h_1)$$

满足初值条件 $\varphi_1(x_1)=y_1$，其中 h_1 是某个正数. 然后，令

$$y(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1;\\ \varphi_1(x), & \text{当}\quad x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1.\end{cases}$$

则 $y = y(x)$ 是连续可微的，而且它在区间 $[x_0, x_1 + h_1]$ 上满足微分方程(3.1). 因此，它是积分曲线 Γ 在区间 $[x_0, x_1 + h_1]$ 上的表达式. 由于已设积分曲线 Γ 的最大右侧存在区间为 $J^+ = [x_0, x_1]$，所以 J^+ 必须包含区间 $[x_0, x_1 + h_1]$. 这是一个矛盾. 因此，J^+ 不可能是有限闭区间.

(2) J^+ 是有限半开区间.

令 $J^+ = [x_0, x_1)$，其中常数 $x_1 > x_0$. 注意，当 $x \in J^+$ 时，积分曲线 Γ 停留在区域 G 内，即

$$(x, \varphi(x)) \in G, \quad 当 \quad x \in J^+.$$

我们要证：对于任何有限闭区域 $G_1 \subset G$，不可能使

$$(x, \varphi(x)) \in G_1, \quad 对一切 \quad x \in J^+ \tag{3.3}$$

成立.

否则，设 G_1 是 G 内一个有限闭区域，使得(3.3)成立. 则有 $\varphi(x_0) = y_0$ 和

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad 当 \quad x \in J^+. \tag{3.4}$$

它等价于

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))dx, \quad (x_0 \leqslant x < x_1). \tag{3.5}$$

因为 $f(x,y)$ 在 G_1 上是连续的，而且 G_1 是一个有限的闭区域，所以 $|f(x,y)|$ 在 G_1 上有上界 $K > 0$. 因此，由(3.3)和(3.4)可见，在 J^+ 上 $|\varphi'(x)|$ 有上界 K. 从而由拉格朗日中值公式推出不等式

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant K|t_1 - t_2|, \quad 当 \quad t_1, t_2 \in J^+.$$

由此不难证明：当 $x \to x_1$ 时，$\varphi(x)$ 的极限存在.

然后，令

$$y_1 = \lim_{x \to x_1} \varphi(x). \tag{3.6}$$

再定义函数

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 当 \quad x_0 \leqslant x < x_1; \\ y_1, & 当 \quad x = x_1. \end{cases}$$

显然，$y = \tilde{\varphi}(x)$ 是连续的. 由(3.5)和(3.6)可见，$y = \tilde{\varphi}(x)$ 在区

间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上满足

$$\widetilde{\varphi}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \widetilde{\varphi}(x))dx.$$

它蕴含 $y=\widetilde{\varphi}(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上是微分方程(3.1)的一个解，而且满足初值条件(3.2). 这就是说，上面的积分曲线 Γ 可延伸到区间 $[x_0, x_1]$ 上. 这与 Γ 的最大存在区间为 $[x_0, x_1)$ 是矛盾的. 因此，对任何有限闭区域 $G_1 \subset G$，关系式(3.3)是不可能成立的.

总结上面的讨论可知，积分曲线 Γ 在 P_0 点的右侧将延伸到区域 G 的边界. 同样可证，积分曲线 Γ 在 P_0 点的左侧也将延伸到区域 G 的边界. 因此，定理 4 得证. ▌

由定理 1 和定理 4 立即可以得出下面的

推论 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，而且对 y 满足局部的李氏条件[即，对区域 G 内任一点 q，存在以 q 点为中心的一个矩形区域 $Q \subset G$，使得在 Q 内 $f(x,y)$ 对 y 满足李氏条件(注意，相应的李氏常数 L 与矩形区域 Q 有关)]，则微分方程(3.1)经过 G 内任一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ，并且 Γ 在 G 内延伸到边界. ▌

【附注 1】 由有限覆盖定理容易推出：如果 G 是有界闭区域，则 $f(x,y)$ 在 G 上满足局部李氏条件等价于它在 G 上满足整体李氏条件. 但当 G 是开区域时，G 上的局部李氏条件则弱于 G 上的整体李氏条件. 对于任意区域 G，如果 $f(x,y)$ 在 G 上对 y 有连续的偏导数，则 f 对 y 满足局部李氏条件.

【例 1】 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{3.7}$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明 由于 x^2+y^2 在整个 (x,y) 平面上连续，并且对 y 有连续的偏导数，所以利用上面的推论可知，这微分方程经过平面上任何一点 P_0 的积分曲线 Γ 是唯一存在的，并将延伸到无限远. 但我们还不能说，积分曲线 Γ 的最大存在区间是无界的. 事实上，我们要

证明它的存在区间是有界的.

设 $y = y(x)$ 是微分方程(3.7)满足初值条件

$$y(x_0) = y_0$$

的解. 令 $J^+ = [x_0, \beta_0)$ 为它的右侧最大存在区间, 其中 $\beta_0 > x_0$.

当 $\beta_0 \leqslant 0$ 时, J^+ 显然是一有限区间.

当 $\beta_0 > 0$ 时, 则存在正数 x_1, 使得

$$[x_1, \beta_0) \subset J^+.$$

因此, 上面的解 $y = y(x)$ 在区间 $[x_1, \beta_0)$ 内满足(3.7), 亦即

$$y'(x) = x^2 + y^2, \quad (0 < x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

由此推出

$$y'(x) \geqslant x_1^2 + y^2(x), \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

或

$$\frac{y'(x)}{x_1^2 + y^2(x)} \geqslant 1, \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

然后, 从 x_1 到 x 积分此不等式, 即得

$$\frac{1}{x_1}\left[\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x_1} - \operatorname{arctg}\frac{y(x_1)}{x_1}\right] \geqslant x - x_1 \geqslant 0,$$

它蕴含

$$0 \leqslant x - x_1 \leqslant \frac{\pi}{x_1}, \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

由此推出 β_0 是一个有限数, 亦即 J^+ 是一有限区间.

同样可证, 解 $y = y(x)$ 的左侧最大存在区间 $J^- = (\alpha_0, x_0]$ 也是一有限区间. 因此, 这解 $y = y(x)$ 的最大存在区间是有限区间 (α_0, β_0), 它与解的初值 (x_0, y_0) 有关. ▌

【例 2】　在平面上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$, 试证初值问题

$$(E): \qquad \frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的右行解(即从 P_0 点出发向右延伸的解)都在区间 $x_0 \leqslant x < \infty$ 上存在.

证明　首先, 由上面的推论可知, 对于平面上任意一个包含

P_0 点的区域 G，初值问题(E)的解都存在且唯一，并可延伸到 G 的边界.

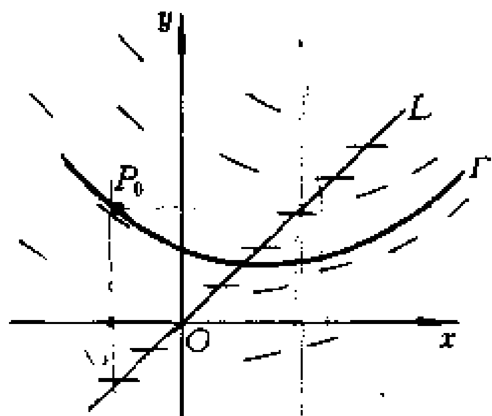


图 3-2

其次，容易看出，直线 L：$y=x$ 是微分方程所对应的线素场的水平等斜线（参见第一章 §2），并且线素的斜率在 L 上方为负，而在 L 下方为正. 换句话说，积分曲线在 L 上方是单调下降的，而在 L 下方是单调上升的.

现在假设 P_0 位于 L 的上方（即 $x_0<y_0$），则利用(E)的（右行）解 Γ 在条形域

$$S:\ \{(x,y)\,|\,x_0\leqslant x<y_0,\ -\infty<y<\infty\}$$

上的延伸定理，和积分曲线 Γ 在 L 上方的单调下降性，易知 Γ 必与 L 相交（参见图 3-2）.

再假设 P_0 位于直线 L 上或其下方（即 $x_0\geqslant y_0$），则在区域

$$G:\ \{(x,y)\,|\,x_0\leqslant x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$$

上应用（右行）解的延伸定理，得出(E)的解 Γ 可延伸到 G 的边界. 另一方面，在 L 下方，积分曲线 Γ 是单调上升的，并且它在向右延伸时不可能从水平等斜线 L 的下方穿越到上方. 因此，它必可向右延伸到跨越区间 $x_0\leqslant x<\infty$. ▌

一般而言，微分方程解的最大存在区间因解而异，对不同的解需要在不同的区间上进行讨论. 因此，当我们不知道解的最大存在区间时就无法对解进行研究. 下面的定理在一定的条件下为我们克服了这个困难.

定理 5　设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{3.8}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域

$$S: \quad \alpha < x < \beta, \quad -\infty < y < \infty$$

内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y)| \leqslant A(x)|y| + B(x), \tag{3.9}$$

其中 $A(x) \geqslant 0$ 和 $B(x) \geqslant 0$ 在区间 $\alpha < x < \beta$ 上是连续的. 则微分方程(3.8)的每一个解都以区间 $\alpha < x < \beta$ 为最大存在区间.

证明　设微分方程(3.8)满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in S,$$

的一个解为 $\Gamma: y = y(x)$. 要证 Γ 的最大存在区间为 $\alpha < x < \beta$. 先证它的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta)$.

假设不然. 令它的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta_0)$，其中 β_0 是一常数，$x_0 < \beta_0 < \beta$.

我们在 β_0 的两侧分别取常数 x_1 和 x_2，使得

$$x_0 < x_1 < \beta_0 < x_2 < \beta, \quad 而且 \quad x_2 - x_1 < x_1 - x_0.$$

在有限闭区间 $[x_0, x_2]$ 上函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是连续有界的；令 A_0 和 B_0 分别是它们正的上界. 再利用(3.9)，我们得到

$$|f(x,y)| \leqslant A_0|y| + B_0, \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_2, -\infty < y < \infty). \tag{3.10}$$

而且不妨设正数

$$\alpha_1 := x_2 - x_1 < \frac{1}{4A_0}.$$

因为 $y = y(x)$ 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在，所以我们有

$$y(x_1) = y_1, \quad (x_1, y_1) \in S.$$

现在，以 (x_1, y_1) 点为中心作一矩形区域

$$R_1: \quad |x - x_1| \leqslant a_1, \quad |y - y_1| \leqslant b_1,$$

其中正数 b_1 是充分大的. 显然，R_1 是条形区 S 内的一个有限闭区域. 由(3.10)容易推出，不等式

$$|f(x,y)| \leqslant A_0(|y_1| + b_1) + B_0, \quad (x,y) \in R_1 \tag{3.11}$$

成立. 令

$$M_1 = A_0(|y_1| + b_1) + B_0 + 1,$$

$$h_1 = \min\left\{a_1, \frac{b_1}{M_1}\right\},$$

并以(x_1,y_1)点为中心作矩形区域

$$R_1^*: \quad |x - x_1| \leqslant h_1, \quad |y - y_1| \leqslant b_1.$$

则 $R_1^* \subseteq R_1$. 我们在 R_1^* 内可以应用定理 4 推出,微分方程(3.8)过(x_1,y_1)的解Γ必可向右延伸到R_1^*的边界. 另一方面,从(3.11)可知,解Γ在R_1^*内必停留在扇形区域

$$|y - y_1| \leqslant M_1|x - x_1|, \quad |x - x_1| \leqslant h_1.$$

因此,解Γ可向右延伸到跨越区间$[x_0, x_1 + h_1)$. 因为 $a_1 < \frac{1}{4A_0}$,以及极限

$$\lim_{b_1\to\infty} \frac{b_1}{M_1} = \frac{1}{A_0},$$

所以只要取充分大的正数 b_1,我们就有

$$h_1 = a_1 = x_2 - x_1.$$

由此推出,Γ在区间 $x_0 \leqslant x < x_2$上存在. 但是,区间$[x_0,x_2)$严格大于Γ的右侧最大存在区间$[x_0,\beta_0)$. 这是一个矛盾,它证明了Γ的右侧最大存在区间必定是$[x_0,\beta)$.

同样可证Γ的左侧最大存在区间必定是$(\alpha,x_0]$. 因此,Γ的最大存在区间是(α,β). ▌

习 题 3-3

1. 利用定理 5 证明:线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \quad (x \in I)$$

的每一个解 $y = y(x)$ 的(最大)存在区间为 I,这里假设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 I 上是连续的.

2. 讨论下列微分方程解的存在区间:

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = y(y - 1)$;

(3)　$\frac{dy}{dx} = y\sin(xy)$；

(4)　$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$.

3. 考虑对称形式的微分方程

$$xdx + ydy = 0,$$

它的定义域为

$$G: \quad x^2 + y^2 > 0.$$

则单位圆($x^2 + y^2 = 1$)是一条积分曲线，它在区域 G 的内部；它并没有延伸到 G 的边界。这一点是否与上述解的延伸定理相矛盾？试说明理由.

*4. 设初值问题

$$(E): \quad \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的解的最大存在区间为 $a < x < b$，其中 (x_0, y_0) 是平面上的任一点，则 $a = -\infty$ 和 $b = \infty$ 中至少有一个成立.

*5. 设初值问题

$$(E): \quad \frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在全平面连续且满足 $yf(x,y) > 0$，当 $y \neq 0$. 则对于任意的 (x_0, y_0)，(E) 的解都在 $-\infty < x < \infty$ 上存在.

*§4.　比较定理及其应用

我们在上节已经看到，为了对微分方程的解的存在区间作出估计，仅应用延伸定理经常是不够的，有时须要分析有关线素场的几何特性(见上节例 2). 下面的几个定理为这种分析提供了一般的原理(它的基本思想其实已含于上节例 1 之中).

定理 6　(第一比较定理)　设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(x,y) < F(x,y), \quad (x,y) \in G; \qquad (4.1)$$

又设函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$(E_1):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

与

$$(E_2):\qquad \frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解，其中 $(x_0, y_0)\in G$. 则我们有

$$\begin{aligned}&\varphi(x)<\Phi(x),\quad 当\ x_0<x<b;\\&\varphi(x)>\Phi(x),\quad 当\ a<x<x_0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明 在区间 $a<x<b$ 上令函数 $\psi(x):=\Phi(x)-\varphi(x)$，则由初值条件和不等式(4.1)有

$$\psi(x_0)=0,\quad \psi'(x_0)=F(x_0, y_0)-f(x_0, y_0)>0.$$

因此，存在 $\sigma>0$，使得

$$\psi(x)>0,\quad 当\quad x_0<x<x_0+\sigma.\tag{4.3}$$

如果(4.2)的第一式不成立，则至少存在一个 $x_1>x_0$，使得 $\psi(x_1)=0$. 取

$$\beta=\min\{x|\ \psi(x)=0,\quad x_0<x<b\}.$$

再结合(4.3)，我们有

$$\psi(\beta)=0,\quad 且\quad \psi(x)>0,\quad 当\ x_0<x<\beta,$$

这蕴含

$$\psi'(\beta)\leqslant 0.$$

但是另一方面，由于 $\psi(\beta)=0$，则有 $\gamma:=\Phi(\beta)=\varphi(\beta)$. 所以再利用(4.1)，我们有

$$\psi'(\beta)=\Phi'(\beta)-\varphi'(\beta)=F(\beta, \gamma)-f(\beta, \gamma)>0.$$

这一矛盾证明了(4.2)的第一式成立. 同理可证第二式也成立. ▌

【附注 1】 定理 6 的几何意义是明显的：斜率小的曲线向右不可能从斜率大的曲线的下方穿越到上方. 应该注意的是，两个线素场只有在同一点，才能比较斜率.

现在考虑初值问题

$$(E):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \quad |x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b$$

上连续，并且令

$$M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)| \quad 和 \quad h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

如果在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上初值问题(E)有二个解 $y=Z(x)$ 和 $y=W(x)$，使得(E)的任何解 $y=y(x)$ 都满足不等式：

$$W(x)\leqslant y(x)\leqslant Z(x), \quad (|x-x_0|\leqslant h),$$

则称 $y=W(x)$ 和 $y=Z(x)$ 分别为初值问题(E)的**最小解**和**最大解**. 由这个定义容易看出，最大解和最小解都是唯一的. 下面的定理肯定了最大解和最小解的存在性，并为第二比较定理的证明作了必要的准备.

定理 7　存在正数 $\sigma<h$，使得在区间 $|x-x_0|\leqslant\sigma$ 上，上述初值问题(E)有最小解和最大解.

证明　考虑与(E)相联系的初值问题

$$(E_m): \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y)+\varepsilon_m, \quad y(x_0)=y_0,$$

其中 $\varepsilon_m>0$ $(m=1,2,\cdots)$，并且当 $m\to\infty$ 时 ε_m 单调下降且趋于 0. 由皮亚诺定理，存在 $h_m>0$ $(h_m\to h$，当 $m\to\infty)$，使得初值问题(E_m)在区间 $|x-x_0|\leqslant h_m$ 上有解 $y=\varphi_m(x)$，即函数 $\varphi_m(x)$ 满足方程

$$\varphi_m(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[f(x, \varphi_m(x))+\varepsilon_m]dx. \tag{4.4}$$

由于 $h_m\to h$ $(m\to\infty)$，所以可取到正数 $\sigma<h$，使得初值问题(E)和(E_m) $(m=1,2,\cdots)$ 的解都在区间 $I: |x-x_0|\leqslant\sigma$ 上存在.

注意到

$$|\varphi_m(x)-y_0|\leqslant b, \quad (x\in I; \quad m=1,2,\cdots),$$

和由(4.4)所得的估计式

$$|\varphi_m(x_1)-\varphi_m(x_2)|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}(f(x,\varphi_m(x)+\varepsilon_m)dx\right|$$

$$\leqslant (M + \varepsilon_1)|x_1 - x_2|,$$

$(x_1, x_2 \in I;\ m = 1,2,\cdots)$,所以 $\{\varphi_m(x)\}$ 在 I 上为一致有界与等度连续. 利用 Ascoli 引理可知,$\{\varphi_m(x)\}$ 在区间 I 上有一致收敛的子序列. 这里不妨设 $\{\varphi_m(x)\}$ 本身在 I 上一致收敛. 令

$$\Phi(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x),$$

则在(4.4)式中(令 $m\to\infty$)取极限,就可推出 $y = \Phi(x)$ 是初值问题(E) 在 I 上的一个解.

最后,我们来证明 $y = \Phi(x)$ 是(E) 在 I 上的右行最大解和左行最小解. 事实上,设 $y = y(x)$ 是(E) 的任一解,则对初值问题(E) 和(E_m) 应用第一比较定理可得

$$y(x) < \varphi_m(x),\quad \text{当}\quad x_0 < x < x_0 + \sigma,$$

$$y(x) > \varphi_m(x),\quad \text{当}\quad x_0 - \sigma < x < x_0.$$

在上面两式中令 $m\to\infty$,取极限,就得到所要的结论.

在初值问题(E_m) 中以 $-\varepsilon_m$ 代换 ε_m,用类似的方法可以证明在区间 I 上初值问题(E) 有左行最大解和右行最小解.

由于初值问题(E) 的所有解在(x_0, y_0) 点均相切,所以(E) 的左行最大(小)解和右行最大(小)解就拼接为整个区间上的最大(小)解. ▌

【附注2】 类似于解的延伸定理,我们可以把(E) 的最大解和最小解从局部延伸到区域 G 的边界. 此外,容易知道:(E) 的解是唯一的,当且仅当它的最小解和最大解是恒同的.

定理 8 (第二比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足

$$f(x,y) \leqslant F(x,y),\quad (x,y) \in G;$$

又设函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$(E_1):\qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$$

与

$$(E_2):\qquad \frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解 $[(x_0,y_0)\in G]$，并且 $y=\varphi(x)$ 是(E_1)的右行最小解和左行最大解（或者：$y=\Phi(x)$ 是(E_2)的右行最大解和左行最小解），则有如下比较关系：

$$\varphi(x)\leqslant\Phi(x),\quad 当\ x_0\leqslant x<b;$$
$$\varphi(x)\geqslant\Phi(x),\quad 当\ a<x\leqslant x_0.$$

证明　此定理容易从定理 6 和定理 7 推出. ▌

【例 1】　讨论微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\sin(xy) \tag{4.5}$$

的解的延伸趋向.

易见 $y=0$ 是这微分方程的零解. 而且由定理 1 和定理 5 推出，这方程过任何一点的解 $y=y(x)$ 都是唯一的，并在无穷区间 $-\infty<x<\infty$ 上存在. 现在，我们讨论解 $y=y(x)$ 当 $x\to\infty$（和 $-\infty$）时的延伸趋向.

注意，当 x 换成 $-x$ 或 y 换成 $-y$ 时，方程(4.5)的形式不变. 所以它的积分曲线的分布既对 y 轴又对 x 轴对称. 因此我们只需讨论在第一象限的情形.

令 $y(0)=y_0$，其中 $y_0\geqslant 0$. 当 $y_0=0$ 时，则由解的唯一性可知 $y=y(x)$ 就是零解 $y=0$. 以下设 $y_0>0$，则由解的唯一性可知 $y=y(x)>0$，$(0\leqslant x<\infty)$；我们要证明

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=0. \tag{4.6}$$

首先，假设积分曲线 Γ: $y=y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 与直线 L: $y=x$ 相交于一点 $\bar{P}(\bar{x},\bar{x})$，$\bar{x}>0$.

由方程(4.5)可知积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x)\leqslant 1$，而直线 L 的斜率 $=1$，所以由第二比较定理得出：当 $x\geqslant\bar{x}$ 时 Γ 将留在 L 的下方.

现取最小的正整数 m，使它满足不等式

$$\bar{x}^2 < (2m - \frac{1}{2})\pi. \tag{4.7}$$

然后，考虑双曲线

$$H: \quad xy = (2m - \frac{1}{2})\pi, \quad (x > 0,\ y > 0).$$

则由(4.7)可见上述交点 $\bar{P}$ 在 H 的下方．现在我们要证：当 $x > \bar{x}$ 时，Γ 也在 H 的下方．

事实上，如果上述结论不成立，则存在 $x_1 > \bar{x}$，使得当 $x = x_1$ 时 Γ 与 H 相交于 P_1 点，而且 Γ 从 H 的左下方进入右上方．由此可见，在 P_1 点 Γ 的斜率 $y'(x_1) \geqslant H$ 的斜率 K_1．由于 P_1 点在直线 L 的下方，所以双曲线 H 在 P_1 点的斜率

$$K_1 = -(2m - \frac{1}{2})\frac{\pi}{x_1^2} > -1,$$

然而

$$y'(x_1) = \sin(x_1 y(x_1)) = \sin(2m - \frac{1}{2})\pi = -1.$$

这是一个矛盾．因此，当 $x > \bar{x}$ 时 Γ 必须在 H 的下方，亦即

$$0 < y(x) < (2m - \frac{1}{2})\frac{\pi}{x}.$$

由这不等式就直接推出(4.6)．

其次，要证：Γ 与 L 确实相交．

为此，考虑双曲线族

$$H_k: \quad xy = k\pi, \quad (x > 0,\ y > 0)$$

$(k = 1, 2, \cdots)$ 及其界定的区域

$$G_k: \quad (k-1)\pi < xy < k\pi, \quad (x > 0,\ y > 0),$$

$(k = 1, 2, \cdots)$．

则由(4.5)可见，积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x)$ 满足不等式：

$$\begin{cases} 0 < y'(x) < 1, & \text{当 } (x, y(x)) \in G_{2n-1}; \\ -1 < y'(x) < 0, & \text{当 } (x, y(x)) \in G_{2n}, \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$．

现在，从点 $P_0(0,y_0)$ 出发向右作一连续的折线 Λ: $y=u(x)$，$(x\geqslant 0)$，使得它的节点 P_k 分别在双曲线 H_k 上，而各直线段的斜率满足条件：

$$u'(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } (x,u(x))\in G_{2n-1};\\ 0, & \text{当 } (x,u(x))\in G_{2n}.\end{cases}$$

因此由第一比较定理得出，从 P_0 点出发的积分曲线 Γ: $y=y(x)$，$(x\geqslant 0)$ 一定在折线 Λ 的下方（参见图 3-3）.

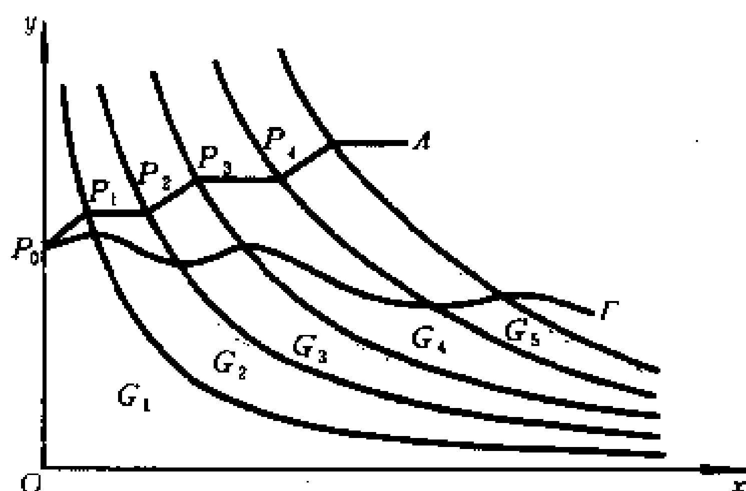


图 3-3

考虑折线 Λ 的节点 $P_k(x_k,y_k)$. 注意，$x_ky_k=k\pi$. 现任取三个相邻的节点 P_n，P_{n+1}，和 P_{n+2}，其中 n 为奇数. 则有

$$x_{n+2}=\frac{(n+2)\pi}{y_{n+2}},\quad x_{n+1}=\frac{(n+1)\pi}{y_{n+1}},\quad x_n=\frac{n\pi}{y_n}.$$

而且 $y_{n+1}=y_n$ 和 $y_{n+2}>y_n$. 因此，我们推出

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\pi}{y_n}$$

和

$$x_{n+2}-x_{n+1}<\frac{\pi}{y_n}.$$

从而

$$x_{n+2}-x_{n+1}<x_{n+1}-x_n.$$

再利用

$$y_{n+2}-y_n=y_{n+2}-y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1},$$

就推出

$$\frac{y_{n+2}-y_n}{x_{n+2}-x_n}=\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{(x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)}$$

$$<\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{2(x_{n+2}-x_{n+1})}=\frac{1}{2}.$$

这就是说，直线段 $[P_n,P_{n+2}]$ 的斜率小于$\frac{1}{2}$，其中 n 为奇数. 因此，如果从 P_1 点出发作一直线

$$L_1:\quad y-y_1=\frac{1}{2}(x-x_1),$$

那么折线 Λ 将在 L_1 的下方. 所以积分曲线 Γ 也在 L_1 的下方.

因为 P_0 点在 L 的上方而在 L_1 的下方，而且当 x 增大时直线 L_1 将从 L 的上方进入下方，所以积分曲线 Γ 也从 L 的上方进入下方. 这就证明了 Γ 和 L 的相交性. ▌

【例 2】 设初值问题

$$\frac{dy}{dx}=x^2+(y+1)^2,\quad y(0)=0 \tag{4.8}$$

的解的右侧最大存在区间为 $[0,\beta)$，试证：$\frac{\pi}{4}<\beta<1$.

证明 由上一节的推论可知，(4.8) 的解存在且唯一，并可延伸到包含坐标原点的任意区域的边界. 下面我们仅给出证明的梗概，而把细节留给读者完成.

1) 先证 $\frac{\pi}{4}\leqslant\beta\leqslant 1$.

当 $|x|\leqslant 1$ 时，显然有

$$(y+1)^2\leqslant x^2+(y+1)^2\leqslant 1+(y+1)^2.$$

因此，我们可以应用比较定理，把初值问题(4.8) 的解与如下两个可积的初值问题

$$(E_1):\qquad \frac{dy}{dx}=(y+1)^2,\quad y(0)=0$$

和

$$(E_2):\qquad \frac{dy}{dx}=1+(y+1)^2,\quad y(0)=0$$

的解分别比较，从而得到 $\frac{\pi}{4}\leqslant\beta\leqslant 1$.

2）再证 $\beta<1$.

在(4.8)的积分曲线上取一点(ξ,η)，其中 $0<\xi\ll 1$，则初值问题

$$(E_3):\qquad \frac{dy}{dx}=(y+1)^2,\quad y(\xi)=\eta$$

是可积的，容易算出它的解的右侧最大存在区间为 $0\leqslant x<C(\xi)$，其中 $C(\xi)=\xi+\frac{1}{\eta+1}$. 由于

$$\begin{aligned}\frac{dC}{d\xi}&=1-\frac{1}{(\eta+1)^2}\frac{d\eta}{d\xi}\\&=1-\frac{1}{(\eta+1)^2}[\xi^2+(\eta+1)^2]<0\end{aligned}$$

且 $C(0)=1$，因此，当 $0<\xi\ll 1$ 时，$C(\xi)<1$. 再对(4.8)和(E_3)应用比较定理可得 $\beta<1$.

3）最后证 $\beta>\frac{\pi}{4}$.

取正数 λ，使 $0<1-\lambda\ll 1$，则初值问题

$$(E_4):\qquad \begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\lambda^2+(y+1)^2,\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解的右侧最大存在区间为 $0\leqslant x<\tilde{C}(\lambda)$. 计算表明，$\tilde{C}(1)=\frac{\pi}{4}$ 而且

$$\left.\frac{d\tilde{C}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1}<0,$$

因此当 $0<1-\lambda\ll 1$ 时 $\tilde{C}(\lambda)>\frac{\pi}{4}$. 最后，再对(4.8)和$(E_4)$应

用比较定理可得 $\beta > \frac{\pi}{4}$. ▌

习 题 3-4

1. 设初值问题(E),矩形区域R,和正数h的意义同定理 1. 试证在(E)的最小解$y = W(x)$和最大解$y = Z(x)$之间充满了(E)的其它解, 即任取一点(x_1, y_1),其中

$$|x_1 - x_0| \leqslant h, \quad W(x_1) \leqslant y_1 \leqslant Z(x_1),$$

则(E)在$|x - x_0| \leqslant h$上至少有一个解$y = u(x)$满足: $u(x_1) = y_1$.

2. 证明定理 8.

3. 对例 2 的上述结论给出详细的证明.

第四章　奇　解

一般说来，一阶微分方程拥有含一个任意常数的通解，另外可能还有个别不含于通解的特解. 这种特解可以理解为通解的一种蜕化现象. 它在几何上往往表现为解的唯一性遭到破坏.

早在1694年莱不尼兹就已观察到，解族的包络也是一个解. 克莱洛(Clairaut，1713—1765)和欧拉对奇解作了某些探讨，得出了从 p-判别式求奇解的方法. 拉格朗日(Lagrange，1736—1813)对奇解和通解的联系作了系统的研究，给出了从 C-判别式求奇解的方法，和奇解是积分曲线族的包络这一几何解释.

本章先介绍与奇解密切相关的一阶隐式微分方程的解法，然后介绍奇解的概念和判别法，以及奇解与通解的联系.

§1.　一阶隐式微分方程

作为对第二章初等积分法的补充，本节讨论一阶隐式方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1.1}$$

的几个特殊解法. 这里所谓隐式的含义，是指在方程中未知函数的微商 $\frac{dy}{dx}$ 没有预先表示为 (x,y) 的显函数.

1.1　微分法

设从微分方程(1.1)中可明显解出未知函数

$$y=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right), \tag{1.2}$$

令 $p=\frac{dy}{dx}$，则有

$$y = f(x,p),$$

其中函数 $f(x,p)$ 对 (x,p) 是连续可微的.

在方程(1.2)中对 x 进行微分,我们得到

$$p = f'_x(x,p) + f'_p(x,p)\frac{dp}{dx},$$

或

$$[f'_x(x,p) - p]dx + f'_p(x,p)dp = 0, \tag{1.3}$$

这是一个关于变量 x 和 p 的一阶显式微分方程.

如果能够得到方程(1.3)的通解

$$p = u(x,C),$$

那么就得到方程(1.2)的通解

$$y = f(x,u(x,C)),$$

其中 C 是一个任意常数;另外,若方程(1.3)有特解

$$p = w(x),$$

那么方程(1.2)有相应的特解

$$y = f(x,w(x)).$$

在某些情况下,方程(1.3)的通解容易写成如下的形式

$$x = v(p,C),$$

则方程(1.2)的通解可写成

$$\begin{cases} x = v(p,C), \\ y = f(v(p,C),p), \end{cases}$$

这里 p 视作一个参变量;同样,如果方程(1.3)有特解

$$x = z(p),$$

则方程(1.2)有相应的特解

$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p),p). \end{cases}$$

【例1】 求解**克莱洛方程**

$$y = xp + f(p), \quad (p = \frac{dy}{dx}), \tag{1.4}$$

其中 $f''(p)\neq 0$.

解 利用微分法,我们得到

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx},$$

亦即

$$[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

当 $\frac{dp}{dx}=0$ 时,我们有 $p=C$. 因此,得到克莱洛方程(1.4)的通解

$$y=Cx+f(C), \tag{1.5}$$

其中 C 是一个任意常数;当 $x+f'(p)=0$ 时,我们得到克莱洛方程(1.4)的一个特解

$$x=-f'(p),\quad y=-f'(p)p+f(p). \tag{1.6}$$

注意,因为 $f''(p)\neq 0$,所以由 $x=-f'(p)$ 可得反函数 $p=w(x)$. 然后代入上式,特解(1.6)可写成如下形式

$$y=xw(x)+f(w(x)), \tag{1.7}$$

它的微商为 $y'=w(x)$. 由此可以推出,在 $x=x_0$ 处特解(1.7)的切线为

$$y=C_0x+f(C_0),$$

其中 $C_0=w(x_0)$. 这就证明特解(1.7)在各点都有通解(1.5)中的某一解在该点与其相切;另外,容易证明 $w(x)$ 不是常数,所以特解(1.7)不能由通解(1.5)给出.

作为例子,当 $f(p)=-\frac{1}{4}p^2$ 时,克莱洛方程的积分曲线族的图形见图 4-1. ▌

【附注】 对克莱洛方程的进一步讨论,读者可参考文献[**19**]的第一章. 与 Arnold 的这一工作有关,目前仍有人对一阶隐式方程进行研究.

【例 2】 求解微分方程

$$x(y')^2-2yy'+9x=0. \tag{1.8}$$

解 由一阶隐式方程(1.8)可得到

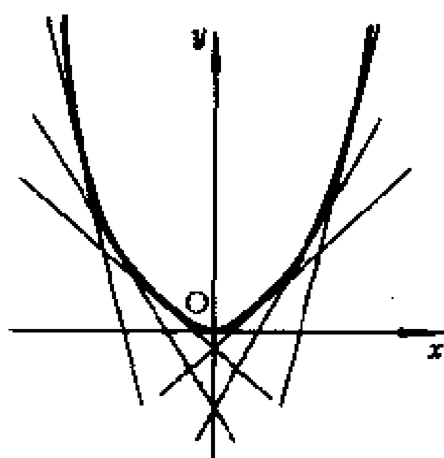


图 4-1

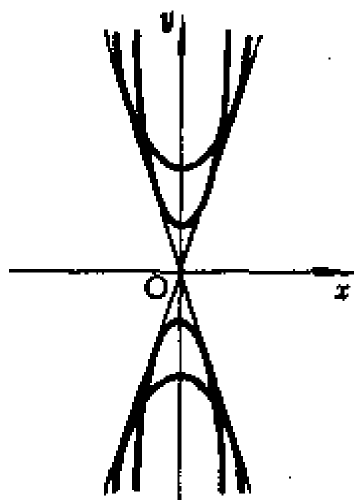


图 4-2

$$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2},\quad (p=y').$$

然后用微分法推出

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2p^2}\right)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0, \tag{1.9}$$

它蕴含

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}$$

和

$$p^2=9.$$

由此可得方程(1.9)的通解

$$p=Cx$$

和二个特解

$$p=3,\quad p=-3.$$

所以我们求得微分方程(1.8)的通解

$$y=\frac{9}{2C}+\frac{C}{2}x^2 \tag{1.10}$$

和二个特解

$$y=3x,\quad y=-3x. \tag{1.11}$$

注意，通解(1.10)不包括特解(1.11)；它们的图形见图 4-2，其主要特征为在这二个特解上的每一点（原点O除外）都有通解中的某一解在该点与其相切．▌

1.2 参数法

设微分方程不明显包含自变量，即

$$F(y,p)=0,\quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right). \tag{1.12}$$

作为变元y和p之间的联系，方程(1.12)在(y,p)平面上一般表示若干条曲线．设

$$y=g(t),\quad p=h(t) \tag{1.13}$$

是其中一条．称(1.13)为(1.12)的一个**参数表示**．

为了下面讨论的需要，设$g(t)$，$g'(t)$和$h(t)$都是参数t的连续函数，而且设$h(t)\neq 0$．

根据上述微分方程的参数表示，我们有

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{g'(t)}{h(t)}dt.$$

再利用积分，可得

$$x=\int\frac{g'(t)}{h(t)}dt+C.$$

因此，微分方程(1.12)有通解

$$x=\int\frac{g'(t)}{h(t)}dt+C,\quad y=g(t). \tag{1.14}$$

【例 3】 求解微分方程

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1. \tag{1.15}$$

解 对它可设参数表达式

$$y=\cos t,\quad \frac{dy}{dx}=\sin t,\quad (-\infty<t<\infty). \tag{1.16}$$

由此可见

$$dx = \frac{1}{\sin t}dy = \frac{1}{\sin t}d\cos t = -\,dt,$$

从而我们得到

$$x = -\,t + C.$$

因此，微分方程(1.15)的通解为

$$x = -\,t + C, \quad y = \cos t;$$

如果消去参数 t，我们得到通解

$$y = \cos(C - x). \tag{1.17}$$

对于方程(1.15)，除了参数表达式(1.16)，还有

$$y = \pm 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

显然，$y = 1$ 和 $y = -1$ 是微分方程(1.15)的二个特解；对于方程(1.15)还可设

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

但是，$y = 0$ 不是微分方程(1.15)的解.

因此，微分方程(1.15)有通解(1.17)，另外还有特解 $y = 1$ 和 $y = -1$. 请读者自己动手画出积分曲线的图形，并注意通解与特解 ($y = \pm 1$) 之间的关系. ▌

类似的方法也可以应用于不明显包含未知函数的微分方程

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

对于一般的一阶隐式微分方程

$$F(x, y, p) = 0, \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right). \tag{1.18}$$

它在(x, y, p)空间表示若干张曲面. 设

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad p = h(u, v)$$

是其中之一，这里 u 和 v 是二个参数. 因为

$$dy = p\,dx,$$

所以我们有

$$g'_u du + g'_v dv = h(u,v)(f'_u du + f'_v dv),$$

它可以写成如下形式

$$M(u,v)du + N(u,v)dv = 0, \tag{1.19}$$

其中

$$\begin{cases} M(u,v) = g'_u(u,v) - h(u,v)f'_u(u,v), \\ N(u,v) = g'_v(u,v) - h(u,v)f'_v(u,v). \end{cases}$$

如果我们能求得一阶显式微分方程(1.19)的通解

$$v = Q(u,C), \tag{1.20}$$

则微分方程(1.18)有通解

$$x = f(u,\ Q(u,C)),\quad y = g(u,\ Q(u,C)),$$

其中 u 是参变量，而 C 是一个积分常数；另外，如果除通解(1.20)外，微分方程(1.19)还有特解

$$v = S(u),$$

则微分方程(1.18)还有特解

$$x = f(u,\ S(u)),\quad y = g(u,\ S(u)).$$

【例 4】　用参数法求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0. \tag{1.21}$$

解　令 $u = x$ 和 $v = \dfrac{dy}{dx}$ 为二个参变量，则可由方程(1.21)得到

$$x = u,\quad \frac{dy}{dx} = v,\quad y = u - v^2.$$

因此，我们得到

$$v = \frac{dy}{dx} = \frac{du - 2vdv}{du},$$

亦即

$$(v - 1)du + 2vdv = 0.$$

容易求得它的通解

$$u = -2v - \ln(v-1)^2 + C$$

和一个特解

$$v = 1.$$

由此得到微分方程(1.21)的通解

$$\begin{cases} x = C - 2v - \ln(v-1)^2, \\ y = C - 2v - \ln(v-1)^2 - v^2 \end{cases}$$

和一个特解

$$x = u, \quad y = u - 1,$$

亦即 $y = x - 1$. ▌

习　题　4-1

1. 求解下列微分方程:

(1)　$2y = p^2 + 4px + 2x^2$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$;

(2)　$y = px\ln x + (xp)^2$;

(3)　$2xp = 2\mathrm{tg}y + p^3\cos^2 y$.

2. 用参数法求解下列微分方程:

(1)　$2y^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$;

(2)　$x^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$;

(3)　$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x^2 = 0$;

(4)　$x^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 4x\frac{dy}{dx}$.

§2. 奇　解

在上一节我们已经看到某些一阶隐式微分方程的个别解具有特殊的几何意义,即它们分别满足下述奇解的定义.

定义 1　设一阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2.1}$$

有一特解

$$\Gamma: \quad y = \varphi(x), \quad (x \in J).$$

如果对每一点 $Q \in \Gamma$，在 Q 点的任何邻域内方程(2.1)有一个不同于 Γ 的解在 Q 点与 Γ 相切，则称 Γ 是微分方程(2.1)的**奇解**.

例如，$y = 3x$ 和 $y = -3x$ $(x \neq 0)$ 是微分方程(1.8)的奇解，$y = 1$ 和 $y = -1$ 是微分方程(1.15)的两个奇解，而(1.7)是克莱洛方程(1.4)的奇解.

下面的定理给出了奇解存在的必要条件.

定理1 设函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p) \in G$ 是连续的，而且对 y 和 p 有连续的偏微商 F'_y 和 F'_p. 若函数 $y = \varphi(x)$ $(x \in J)$ 是微分方程(2.1)的一个奇解，并且

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G, \quad (x \in J),$$

则奇解 $y = \varphi(x)$ 满足一个称之为 **p-判别式**的联立方程

$$F(x,y,p) = 0, \; F'_p(x,y,p) = 0, \tag{2.2}$$

其中 $p = \frac{dy}{dx}$；或(从中消去 p)与其等价的方程

$$\Delta(x,y) = 0 \tag{2.2*}$$

((2.2*)在 (x,y) 平面上决定的曲线称为 **p-判别曲线**).

证明 因为 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(2.1)的解，所以它自然满足上述 p-判别式(2.2)的第一式. 现证它也满足第二式.

假设不然. 则存在 $x_0 \in J$，使得

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$

其中 $y_0 = \varphi(x_0)$ 和 $p_0 = \varphi'(x_0)$. 注意，

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0$$

和 $(x_0, y_0, p_0) \in G$. 因此，我们可以利用隐函数定理推出，由方程(2.1)在 (x_0, y_0) 附近唯一地确定了

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.3}$$

其中函数 $f(x,y)$ 满足：$f(x_0, y_0) = p_0$. 这就证明了微分方程(2.1)所有满足 $y(x_0) = y_0$，$y'(x_0) = p_0$ 的解必定是微分方程(2.3)的解.

另一方面. 由于函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点的某邻域内是连续

的，而且对 y 有连续的偏微商

$$f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_p(x,y,f(x,y))},$$

所以由毕卡定理可知，微分方程(2.3)满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解是存在而且唯一的. 由此可见，$y=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处的某一邻域内是微分方程(2.3)的唯一解. 这就证明了，在 (x_0,y_0) 点附近不可能存在微分方程(2.1)的其它解在该点与 $y=\varphi(x)$ 相切.

这个结论与 $y=\varphi(x)$ 是奇解的假设不能相容. 因此，反证法的假设不能成立，亦即 $y=\varphi(x)$ 也满足上述 p- 判别式的第二式. 定理 1 从而得证. ▌

容易验证，微分方程(1.8)的奇解 $y=3x$ 和 $y=-3x$ 满足相应的 p- 判别式

$$xp^2-2yp+9x=0,\quad 2xp-2y=0;$$

微分方程(1.15)的奇解 $y=1$ 和 $y=-1$ 满足相应的 p- 判别式

$$p^2+y^2-1=0,\quad 2p=0;$$

同样，克莱洛方程(1.4)的奇解(1.7)也满足相应的 p- 判别式

$$xp+f(p)-y=0,\quad x+f'(p)=0.$$

这里须注意，由 p- 判别式确定的函数 $y=\psi(x)$ 不一定是相应微分方程的解；即使是解，也不一定是奇解.

例如，微分方程(1.21)的 p- 判别式为

$$p^2+y-x=0,\quad 2p=0;$$

消去 p 即得 $y=x$. 但是，$y=x$ 不是微分方程(1.21)的解.

又如，微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2=0 \tag{2.4}$$

的 p- 判别式为

$$p^2-y^2=0,\quad 2p=0;$$

消去 p，即得 $y=0$. 它是微分方程(2.4)的解. 但是，容易求出方程(2.4)的通解为

$$y = Ce^{\pm x},$$

由此容易验证 $y=0$ 不是奇解.

这就是说,定理1虽然把寻找微分方程(2.1)的奇解的范围缩小到它的 p- 判别式(2.2)或(2.2*),但是由 p- 判别式规定的函数 $y=\psi(x)$ 仍须经过验证才能确认是否为奇解. 而在不知道通解的情况下就很难进行这种验证. 下面的定理在某种条件下克服了这一困难.

定理 2　设函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p)\in G$ 是二阶连续可微的. 又设由微分方程(2.1)的 p- 判别式

$$F(x,y,p)=0,\quad F'_p(x,y,p)=0, \tag{2.5}$$

(消去 p)得到的函数 $y=\psi(x)$ $(x\in J)$ 是微分方程(2.1)的解. 而且设条件

$$F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0,\quad F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0 \tag{2.6}$$

对 $x\in J$ 成立. 则 $y=\psi(x)$ 是微分方程(2.1)的奇解.

(定理2的证明有一定的难度,而且它已超出一般常微分方程教程的范围. 因此,我们把它放在本章最后一节,作为一个附录,供有兴趣的读者参考.)

下面我们举例说明定理2的一个应用.

考虑微分方程

$$\left[(y-1)\frac{dy}{dx}\right]^2 = ye^{xy}. \tag{2.7}$$

它的 p- 判别式为

$$(y-1)^2p^2 - ye^{xy} = 0,\quad 2p(y-1)^2 = 0.$$

消去 p 即得 $y=0$. 易知 $y=0$ 是微分方程(2.7)的解. 而且相应于(2.6)的条件成立,即:

$$F'_y(x,0,0) = -1,\quad F''_{pp}(x,0,0) = 2.$$

因此,由定理2可知,$y=0$ 是微分方程(2.7)的奇解;而且易知这是唯一的奇解.

习　题　4-2

1. 利用 p-判别式求下列微分方程的奇解：

(1) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$;

(2) $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$;

(3) $(y-1)^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{4}{9}y$.

2. 举例说明，在定理 2 的条件(2.6) 中的二个不等式是缺一不可的.

3. 设连续函数 $E(y)$ 满足：1) $E(0)=0$ 和 2) 当 $0<y\leqslant 1$ 时 $E(y)\neq 0$. 则 $y=0$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = E(y)$$

的奇解当且仅当瑕积分

$$\int_0^1 \frac{dy}{E(y)} \quad 收敛.$$

[注意，本题已在习题 2-2 中出现过，现在是作为 Osgood 唯一性定理的一个相反的情况.]

§3. 包　络

本节将采用微分几何学中有关曲线族的包络的概念来阐明奇解与通解之间的联系，以及讨论寻求奇解的方法.

设单参数 C 的曲线族

$$V(x,y,C) = 0, \tag{3.1}$$

其中函数 $V(x,y,C)$ 对 $(x,y,C)\in D$ 是连续可微的.

例如，单参数 C 的曲线族

1) $x^2+y^2=C$, $(C>0)$;

2) $y-(x-C)^2=1$, $(-\infty<C<\infty)$,

在平面上分别表示一个以原点为中心的圆族和一个顶点位于直线 $y=1$ 上的抛物线族.

定义 2　设在平面上有一条连续可微的曲线 Γ. 如果对于任一

点 $q \in \Gamma$，在曲线族(3.1)中都有一条曲线 $K(C^*)$ 通过 q 点并在该点与 Γ 相切，而且 $K(C^*)$ 在 q 点的某一邻域内不同于 Γ. 则称曲线 Γ 为曲线族(3.1)的一支**包络**.

例如，直线 $y = 1$ 是上面的抛物线族 2) 的包络；而直线族 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ 有包络为 $y = x^2$（参见图 4-1). 并不是每个曲线族都有包络，例如上面的同心圆族 1) 就没有包络.

【附注 1】　这里我们对包络所下的定义与一般微分几何学中所见到的定义稍有不同，在那里要求曲线族中的每一条曲线都与包络相切. 而我们所给的定义在微分方程的应用上比较方便（见下面的例 2).

定理 3　设微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3.2}$$

有通积分为

$$U(x, y, C) = 0. \tag{3.3}$$

又设(积分)曲线族(3.3)有包络为

$$\Gamma: \qquad y = \varphi(x), \quad (x \in J).$$

则包络 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(3.2)的奇解.

证明　根据奇解和包络的定义，我们只需要证明 Γ 是微分方程(3.2)的解.

在 Γ 上任取一点 (x_0, y_0)，其中 $y_0 = \varphi(x_0)$. 则由包络的定义可知，曲线族(3.3)中有一条曲线 $y = u(x, C_0)$ 在 (x_0, y_0) 点与 $y = \varphi(x)$ 相切，即

$$\varphi(x_0) = u(x_0, C_0), \qquad \varphi'(x_0) = u'_x(x_0, C_0).$$

因为 $y = u(x, C_0)$ 是微分方程(3.2)的一个解，所以

$$F(x_0, u(x_0, C_0), u'_x(x_0, C_0)) = 0.$$

因此，$F(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0)) = 0$. 由于 $x_0 \in J$ 是任意给定的，这后一等式就说明了 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(3.2)的解. 定理 3 证完. ▌

注意，由奇解的定义可知，奇解是通解的包络. 因此，由定理 3

可知，求微分方程的奇解归结到求它的通积分的包络.

定理 4　设 Γ 是曲线族(3.1)的一支包络. 则它满足如下的 C-判别式

$$V(x,y,C)=0,\quad V'_C(x,y,C)=0; \tag{3.4}$$

或(消去 C，得到与其等价的关系式)

$$\Omega(x,y)=0. \tag{3.4*}$$

证明　由包络的定义可见，我们可对包络 Γ 给出如下的参数表达式

$$x=f(C),\quad y=g(C),\quad (C\in I)$$

其中 C 为曲线族(3.1)的参数. 因此，我们推出

$$V(f(C),g(C),C)=0,\quad (C\in I). \tag{3.5}$$

因为包络是连续可微的，所以我们不妨设 $f(C)$ 和 $g(C)$ 对 C 也是连续可微的. 由此推出

$$V'_x f'(C)+V'_y g'(C)+V'_C=0,\quad (C\in I), \tag{3.6}$$

其中 $V'_x=V'_x(f(C),g(C),C)$，$V'_y=V'_y(f(C),g(C),C)$ 和 $V'_C=V'_C(f(C),g(C),C)$.

设对于任意给定的 $C\in I$，当

$$(f'(C),g'(C))=(0,0)\ \text{或}\ (V'_x,V'_y)=(0,0) \tag{3.7}$$

成立时，则由(3.6)推出

$$V'_C(f(C),g(C),C)=0; \tag{3.8}$$

当(3.7)不成立时，则有

$$(f'(C),g'(C))\neq(0,0)\ \text{和}\ (V'_x,V'_y)\neq(0,0).$$

这表示包络 Γ 在点 $q(C)=(f(C),g(C))$ 的切向量 $(f'(C),g'(C))$，以及通过 $q(C)$ 点的积分曲线 $V(x,y,C)=0$ 在 $q(C)$ 点的切向量 $(-V'_y,V'_x)$ 都是非退化的. 由于这二个切向量在 $q(C)$ 点共线(相切性)，所以有

$$f'(C)V'_x+g'(C)V'_y=0,$$

由它与(3.6)也推出(3.8)成立. 因此，对于任何 $C\in I$，关系式(3.5)和(3.8)同时成立. 这就证明了包络 Γ 满足 C-判别式(3.4).

定理 4 从而得证. ▌

反之，满足 C- 判别式的曲线未必是相应曲线族的包络(参看下面的例 1)，而如下定理给出了它成为包络的一个充分条件.

定理 5 设由曲线族(3.1) 的 C- 判别式

$$V(x,y,C)=0,\quad V'_C(x,y,C)=0$$

确定一支连续可微的曲线

$$\Lambda:\quad x=\varphi(C),\quad y=\psi(C),\quad (C\in J),$$

而且它满足非蜕化性条件

$$(\varphi'(C),\psi'(C))\neq(0,0)\ \text{和}\ (V'_x,V'_y)\neq(0,0),\qquad(3.9)$$

其中 $V'_x=V'_x(\varphi(C),\psi(C),C)$ 与 $V'_y=V'_y(\varphi(C),\psi(C),C)$. 则 Λ 是曲线族(3.1) 的一支包络.

证明 在 Λ 上任取一点 $q(C)=(\varphi(C),\psi(C))$，则有

$$V(\varphi(C),\psi(C),C)=0,\ V'_C(\varphi(C),\psi(C),C)=0.\quad(3.10)$$

因为$(V'_x,V'_y)\neq(0,0)$，所以可对方程(3.1) 在 $q(C)$ 点利用隐函数定理确定一条连续可微的曲线 Γ_C: $y=h(x)$ [或 $x=k(y)$]，它在 $q(C)$ 点的斜率为

$$m[\Gamma_C]=-\frac{V'_x(\varphi(C),\psi(C),C)}{V'_y(\varphi(C),\psi(C),C)};$$

或曲线 Γ_C 在 $q(C)$ 有切向量为

$$\tau(C)=(-V'_y,\ V'_x).$$

而 Λ 在 $q(C)$ 点的切向量为

$$v(C)=(\varphi'(C),\ \psi'(C)).$$

另一方面，由(3.10) 的第一式对 C 求微分得到

$$\varphi'(C)V'_x+\psi'(C)V'_y+V'_C=0,$$

再利用(3.10) 的第二式推出

$$\varphi'(C)V'_x+\psi'(C)V'_y=0.$$

这就证明了切向量 $\tau(C)$ 和 $v(C)$ 在 $q(C)$ 点是共线的，亦即曲线族(3.1) 中有曲线 Γ_C 在 $q(C)$ 点与 Λ 相切. 因此，Λ 是曲线族(3.1) 的一支包络. 定理 5 证完. ▌

【例 1】　试求微分方程

$$(y-1)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{4}{9}y \tag{3.11}$$

的奇解.

解　首先,我们不难求出微分方程(3.11)的通积分

$$(x-C)^2-y(y-3)^2=0, \tag{3.12}$$

其中 C 为任意常数($-\infty<C<\infty$). 再由相应的 C- 判别式

$$(x-C)^2-y(y-3)^2=0,\quad -2(x-C)=0$$

确定二支连续可微的曲线 $y=0$ 和 $y=3$,对它们分别作如下形式的参数表示式

$$\Lambda_1:\qquad x=C,\quad y=0,\quad (-\infty<C<\infty);$$

$$\Lambda_2:\qquad x=C,\quad y=3,\quad (-\infty<C<\infty).$$

容易验证 Λ_1 满足相应的非蜕化条件(3.9). 因此,Λ_1 是积分曲线族(3.12)的一支包络,从而它是微分方程(3.11)的奇解.

而 Λ_2 不满足非蜕化性条件,所以还不能断言 Λ_2 是否为包络. 不过我们可以利用简单的作图得知,Λ_2 不是曲线族(3.12)的包络. 因此,它不是奇解,虽然它是微分方程(3.12)的解. (在作图时,须注意在(3.11)中 y 不能取负值,而且积分曲线

$$x-C=\pm(y-3)\sqrt{y}$$

与直线 $y=3$ 相交于点$(C,3)$,但不是相切的关系.) ∎

【例 2】　求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y^2\frac{dy}{dx}+y^2=0. \tag{3.13}$$

这微分方程可写成

$$(y'^3-y^2)(y'-1)=0.$$

由此不难得到通积分

$$\left(y-\frac{1}{27}(x-C)^3\right)(y-(x-C))=0. \tag{3.14}$$

它的 C- 判别式为

$$\begin{cases} \left(y - \frac{1}{27}(x - C)^3\right)(y - x + C) = 0, \\ \left(y - \frac{1}{27}(x - C)^3\right) + \frac{1}{9}(x - C)^2(y - x + C) = 0. \end{cases}$$

由此得到

$$\Lambda: \qquad x = C,\ y = 0,\ (-\infty < C < \infty).$$

易知，Λ 是积分曲线族(3.14)的包络. 因此，$y = 0$ 是奇解. ▌

注意，在(积分)曲线族(3.14)中 $y = x - C$ 与奇解 $y = 0$ 相交而不相切. 因此，如果按照微分几何中通常对包络的定义，$y = 0$ 就不是(3.14)的包络，从而不能采用求包络的方法得到这个奇解. 而我们对包络的定义却避免了这个技术上的麻烦.

习 题 4-3

1. 试求克莱洛方程的通解及其包络.
2. 试求一微分方程，使它有奇解为 $y = \sin x$.

* § 4. 奇解的存在定理

现在我们来证明在第二节中已叙述过的定理 2，它是有关奇解的一个存在定理.

证明 因为 $y = \psi(x)$ 是微分方程(2.1)的解，所以我们有

$$F(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0, \quad (x \in J). \tag{4.1}$$

另一方面，由于 $y = \psi(x)$ 是从(2.5)消去 p 得到的，所以由(4.1)推出

$$F'_p(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0, \quad (x \in J). \tag{4.2}$$

现在对微分方程(2.1)作变换

$$y = \psi(x) + u,$$

这里 u 是新的未知函数. 则由(2.1)得到

$$H(x, u, q) = 0, \quad \left(q = \frac{du}{dx}\right), \tag{4.3}$$

其中函数

$$H(x,u,q) = F(x,\ \psi(x) + u,\ \psi'(x) + q)$$

对(x,u,q)在某一区域内是连续可微的.

任给$x_0 \in J$,则函数$H(x_0,u,q)$对(u,q)在$(0,0)$点的邻域内是二阶连续可微的,而且满足条件

$$H(x_0,0,0) = 0, \quad H'_q(x_0,0,0) = 0, \tag{4.4}$$

和

$$H'_u(x_0,0,0) \neq 0, \quad H''_{qq}(x_0,0,0) \neq 0. \tag{4.5}$$

由这些条件的几何意义易见,在区间$0 < u < \delta_0$上存在一个连续函数$q = \alpha(u)$,满足$\alpha(0) = 0$, $\alpha(u) > 0$,其中δ_0是充分小的常数,使得

$$H(x_0,u,\alpha(u)) = 0. \tag{4.6}$$

取充分小的$u_0 \in (0,\delta_0)$,则$q_0 = \alpha(u_0)$也是充分小的.因此,由等式(4.6)和条件(4.5)我们有

$$H(x_0,u_0,q_0) = 0, \quad H'_q(x_0,u_0,q_0) \neq 0.$$

然后可对(4.3)利用隐函数定理得到

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \tag{4.7}$$

其中函数$f(x,u)$在(x_0,u_0)点的某一邻域内是连续的,而且对u有连续的偏微商,另外$f(x_0,u_0) = q_0$.因此,微分方程(4.7),从而微分方程(4.3)存在唯一的解

$$u = u(x), \quad (|x - x_0| \leqslant d), \tag{4.8}$$

满足条件

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = q_0.$$

注意,由(4.8)给出的解$u = u(x)$是微分方程(4.3)的非零解,只要$u_0 > 0$.另一方面,$u = 0$是微分方程(4.3)的零解.如果我们能证明$u = 0$是微分方程(4.3)的奇解,那么也就证明了$y = \psi(x)$是微分方程(2.1)的奇解.因此,我们只需证明,对充分小的u_0,解$u = u(x)$与$u = 0$相交而且相切,亦即

$$u(\bar{x}_0)=0,\quad u'(\bar{x}_0)=0,\tag{4.9}$$

其中 $\bar{x}_0$在 x_0的近旁，只要 $u_0>0$ 充分小.

以下设 $u=u(x)$ 是由(4.8)给出的.注意，当x在x_0的近旁时，$u(x)>0$，而且 $u=u(x)$ 满足(4.3).

现在，对(4.3)的左端函数进行泰勒展开，得到一个恒等式

$$F(x,\psi(x),\psi'(x))+F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))u+F'_p(x,\psi(x),\psi'(x))\frac{du}{dx}$$

$$+\frac{1}{2}\left[F''_{yy}(*)u^2+2F''_{yp}(*)u\frac{du}{dx}+F''_{pp}(*)(\frac{du}{dx})^2\right]\equiv 0,$$

其中 $F''_{yy}(*)$，$F''_{yp}(*)$ 和 $F''_{pp}(*)$ 都是 x 的连续函数，而且当 $u_0=0$ 时有

$$F''_{pp}(*)=F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0.$$

因此，可把上面的恒等式写成如下形式

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2A(x,u_0)u\frac{du}{dx}+B(x,u_0)u^2=C(x,u_0)u,$$

其中 $A(x,u_0)$，$B(x,u_0)$ 和 $C(x,u_0)$ 是连续函数，而且

$$C(x,0)=-\frac{2F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))}{F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))}\neq 0.$$

由此推出

$$\left(\frac{du}{dx}+A(x,u_0)u\right)^2=C(x,u_0)u+(A^2-B)u^2$$

$$=[C(x,u_0)+(A^2-B)u]u,$$

亦即

$$\frac{du}{dx}=E(x,u_0)\sqrt{u},\tag{4.10}$$

其中连续函数

$$E(x,u_0)=\sqrt{C(x,u_0)+(A^2-B)u(x)}-A(x,u_0)\sqrt{u(x)}$$

满足

$$E(x,0)=\sqrt{C(x,0)}\geqslant a_0>0.\tag{4.11}$$

因此，由(4.10)可以得到

$$u(x) = \left[\sqrt{u_0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} E(x, u_0)\,dx\right]^2.$$

然后，由它再利用条件(4.11)就推出，在 x_0的左侧近旁存在 $\bar{x}_0$，使得 $u(\bar{x}_0) = 0$，从而(4.9) 成立．定理 2 的证明到此完结．▌

第五章　高阶微分方程

在实际问题中出现的微分方程通常包含若干个未知函数 y_1，y_2，…，y_k，以及它们的一些微商；设它们的微商出现的最高阶数分别为 m_1，m_2，…，m_k，则 $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 叫作该微分方程的阶，它可以看作是评估问题难度的一个量．如果我们能把一个 n 阶的微分方程问题降低到 $n-1$ 阶的问题，那就使微分方程求解问题前进了一步．本章将通过一些具体的例子介绍微分方程的降阶技巧，然后讨论一般高阶微分方程的初值问题解的存在性和唯一性，以及解对初值和参数的连续性与可微性．关于高阶线性微分方程的一般理论和求解方法，我们将专门在下一章进行介绍．

§1.　几个例子

有一类微分方程不明显包含自变量，这类方程叫作**自治（或驻定）微分方程**，对它们可以考虑降阶．例如，对如下的 n 阶自治微分方程

$$F\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{1.1}$$

令 $z = \frac{dy}{dx}$，则有恒等式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = z\dfrac{dz}{dy}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(z\dfrac{dz}{dy}\right) = z^2\dfrac{d^2z}{dy^2} + z\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^ny}{dx^n} = \varphi\left(z,\ \dfrac{dz}{dy},\ \cdots,\ \dfrac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right). \end{cases}$$

然后把它们代入方程(1.1),我们就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$F_1\left(y,\ z,\ \frac{dz}{dy},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)=0,$$

其中 z 是未知函数,而 y 是自变量.

例如,微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x) \tag{1.2}$$

是一个二阶的自治方程. 令 $v=\frac{dx}{dt}$,则

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

然后代入方程(1.2),我们得到一个一阶方程

$$v\frac{dv}{dx}=f(x),$$

它是变量分离的方程. 因此,可以求出它的积分

$$\frac{1}{2}v^2=F(x)-\frac{1}{2}C_1,$$

或

$$v^2=2F(x)-C_1, \tag{1.3}$$

其中 C_1 是一个任意常数,而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 注意,积分(1.3)对于固定的 C_1 实际上是一个一阶的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{2F(x)-C_1},$$

正巧它也是变量分离的. 因此,又可求出它的积分

$$G(x,\ C_1)=t+C_2, \tag{1.4}$$

其中 C_2 是第二个任意常数,而

$$G(x,\ C_1)=\int\frac{dx}{\pm\sqrt{2F(x)-C_1}}.$$

称(1.4)为微分方程(1.2)的通积分;通常由它可以得到通解

$$x=u(t,\ C_1,\ C_2). \tag{1.5}$$

但在实际求解时,求原函数 G 和由(1.4)反解 x 都可能碰到困难.

例如，当 $F(x)$ 是一个三次多项式时，G 就是一个椭圆函数．

而对某些实际问题，并不需要完全求出通解(1.5)．如果我们只对运动的位移 x 和速度 v 之间的关系，即运动的相 (x,v) 感兴趣，那么(1.3) 式就已经给出了这种关系．事实上，对于适当固定的常数 C_1，关系式(1.3) 在平面(x,v) 上确定一条(或几条) 名为**轨线**的曲线 Γ_{C_1}．我们把平面(x,v) 称为**相平面**，把相平面上的轨线分布图称为**相图**①．

例如，当 $f(x)=-x$ 时，我们有

$$v^2+x^2=-C_1,$$

这时任意常数 C_1 必须是负的．令 $C_1=-C^2$，则轨线 Γ_{C_1} 是一个以原点 O 为中心和以 $C>0$ 为半径的圆周．因此，微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0 \tag{1.6}$$

的相图如图 5-1．注意，微分方程(1.6) 等价于

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-x.$$

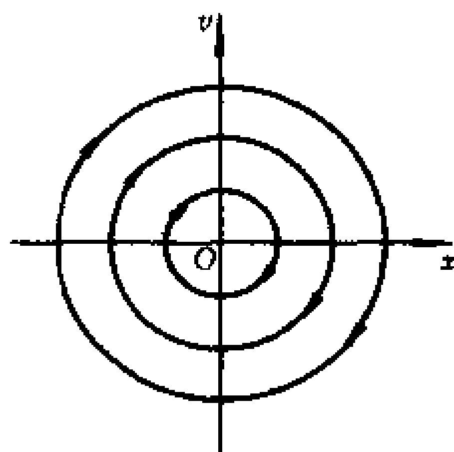


图 5-1

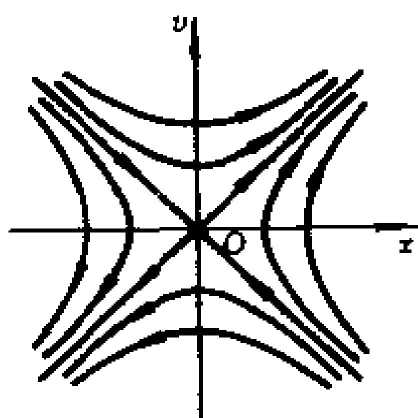


图 5-2

① 我们将在第八章的 §1 中给出相空间和轨线的一般定义．

同样，可以作出微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

的相图如图 5-2，其中轨线的箭头方向是根据关系

$$\frac{dx}{dt} = v$$

画出的，它表示运动在轨线上的方向. 在图 5-1 中每条轨线都是封闭的，这表明相应的运动具有周而复始的周期性，而相图 5-2 所表示的运动就没有这种性质. 注意，在上述两个相图中原点 O 都分别表示各自的静止状态，它对应于各自方程的零解.

当 $f(x)$ 不是 x 的线性函数时，要作出方程(1.2)的相图就不象上面那样简单了. 以下我们介绍一个对一般方程(1.3)的几何作图法：

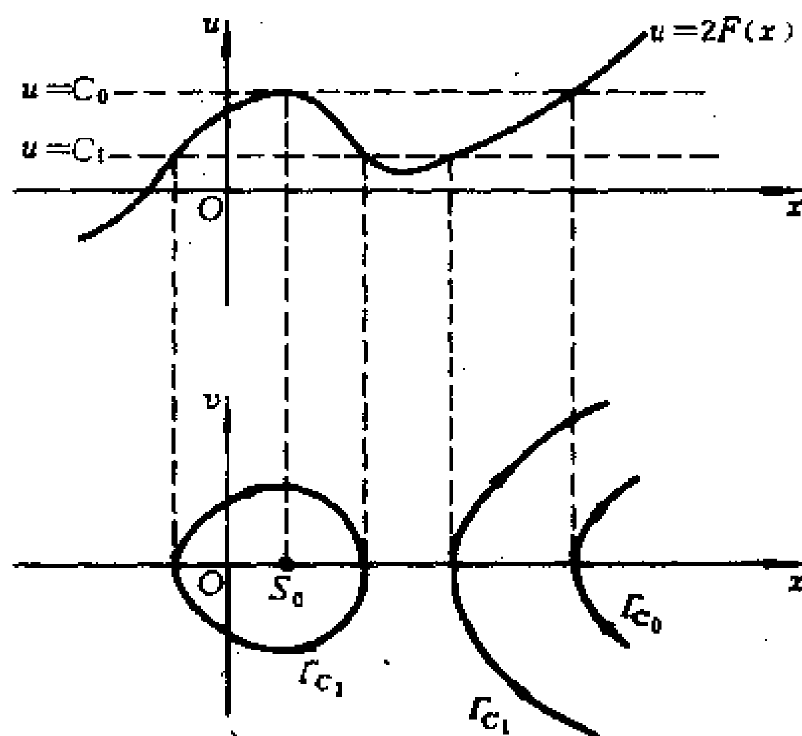


图 5-3

首先，在辅助平面 (x,u) 上作出函数

$$u = 2F(x)$$

的图形 Δ；其次，对于任意固定的常数 C_1，再考虑图形 Δ 在水平线 $u = C_1$ 之上的那部分 $\Delta^+(C_1)$，即

$$2F(x) - C_1 \geqslant 0;$$

然后，根据(1.3)或 $v = \pm\sqrt{2F(x) - C_1}$ 把辅助平面 (x,u) 上的图形 $\Delta^+(C_1)$ 变换成相平面 (x,v) 上的图形，即得相应的运动轨线 Γ_{C_1}（可能不止一条）. 图 5-3 简明地表示了这种作图法.

注意，在图 5-3 中与 $\Delta^+(C_1)$ 相应的轨线 Γ_{C_1} 有两个分支，其中之一是一封闭曲线. 特别，当 C_1 增加至 C_0 时，相应的封闭曲线 Γ_{C_1} 就收缩到静止点 S_0. 请读者再考虑 $C_1 > C_0$ 的情况，或 C_1 减少时轨线 Γ_{C_1} 变化的情况.

【例 1】　单摆方程：

设有一长度为 l 不能伸长的细线，它的上端固定在空间中的 P_0 点，而在下端悬挂一个质量为 m 的小球，并让它在一垂直平面内自由摆动，这里所说自由的含意是：单摆除重力外不受其它外力的作用.

令摆线与垂线的有向夹角为 x，而 $x = 0$ 对应于单摆下垂的位置. 显然，摆锤将在以 P_0 为中心而以 l 为半径的圆周上来回振动. 这时 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 分别表示单摆振动的角速度和角加速度；而摆锤沿圆周的切向加速度为 $l\frac{d^2x}{dt^2}$. 利用牛顿的第二运动定律，容易推出单摆的运动方程为

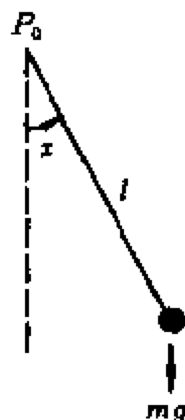


图 5-4

$$m\left(l\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -mg\sin x,$$

或写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2\sin x = 0, \tag{1.7}$$

其中常数 $a = \sqrt{g/l} > 0$.

单摆方程(1.7)属于方程(1.2)的类型.因此,可以用上述方法求解.其实还可以采用更直接的手法:以$\frac{dx}{dt}$乘方程(1.7),即得

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + a^2\sin x\frac{dx}{dt} = 0,$$

对它可以直接积分,得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2\cos x = -\frac{1}{2}C_1.$$

我们把这种由高阶微分方程积分一次(因而包含一个任意常数)的等式称为**首次积分**(严格的定义见第十章).上式可改写为

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2a^2\cos x - C_1}. \tag{1.8}$$

由此分离变量,就可得到通积分

$$\int\frac{dx}{\pm\sqrt{2a^2\cos x - C_1}} = t + C_2.$$

因为这里出现了椭圆积分,我们再往下推演时就碰到困难.

为了克服这个困难,我们利用 $\sin x$ 的泰勒级数

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots,$$

并且取它的线性近似(即一次近似),

$$\sin x \approx x,$$

这样原来的单摆方程(1.7)经"线性化"后就变成

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0. \tag{1.9}$$

对于这个简单的"线性化"方程,容易得到它的首次积分

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + a^2x^2 = C_1^2, \quad (C_1 \geqslant 0).$$

因此，我们有

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{C_1^{\ 2}-a^2x^2},$$

再利用分离变量法，可以得到通积分

$$\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{ax}{C_1}\right)=t+C_2,$$

由此求得通解

$$x=A\sin(at+D), \tag{1.10}$$

其中

$$A=\frac{C_1}{a}\geqslant 0,\quad D=aC_2$$

是二个任意常数．由通解(1.10)可见，当 $A=0$ 时我们得到单摆的静止状态：$x=0$ 和 $v=\frac{dx}{dt}=0$；当 $A>0$ 时单摆将以 A 为振幅和以 a 为频率作简谐振动．注意，单摆振动一次所需的时间为 $2\pi/a$，它与振幅的大小无关．这就是所谓单摆振动的等时性，它是古代摆钟的理论依据．实验结果表明，上面的结论对单摆的小振动 $(0<A<\frac{\pi}{6})$ 是相当精确的．

但是，通解(1.10)不能解释单摆在大振动时出现的某些现象．例如，单摆的进动［即 $\frac{dx}{dt}>0$ (或 <0)，而当 $t\to\infty$ 时 $x\to\infty$ (或 $-\infty$)］和单摆振动实际上的不等时性．因此，需要回到原来的单摆方程(1.7)．

力学常识告诉我们，单摆振动依赖于它的初始状态，亦即初值条件

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=v_0, \tag{1.11}$$

其中常数 x_0 和 v_0 分别表示单摆在初始时刻 t_0 时的角位移和角速度．设单摆的振幅为 A $(0<A<\pi)$，则它在某一时刻 t_1 的运动状态应该是

$$x(t_1)=A,\quad x'(t_1)=0. \tag{1.12}$$

然后再利用(1.8),就推出

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos x-\cos A}.$$

设单摆振动一次的周期为 $T=T(A)$，则有

$$\frac{1}{4}T=\int_0^A\frac{dx}{\sqrt{2}a\sqrt{\cos x-\cos A}},$$

或

$$T=\frac{2\sqrt{2}A}{a}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{\cos Au-\cos A}}. \tag{1.13}$$

由这个公式可以用微积分的方法证明：

$$\lim_{A\to 0}T(A)=\frac{2\pi}{a}\quad 和\quad \lim_{A\to\pi}T(A)=\infty.$$

这就表明单摆振动的周期 T 与振幅 A 有关,亦即单摆振动其实没有等时性.

另一方面,利用(1.8)式不难画出单摆运动的相图 5-5.

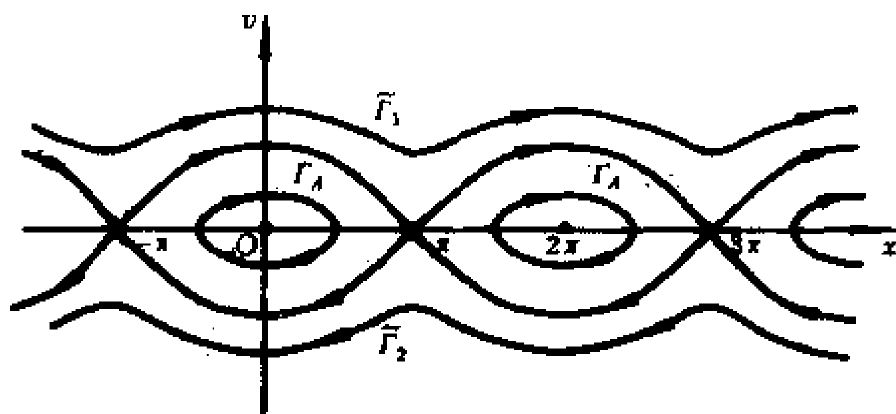


图 5-5

由相图 5-5 可以清楚看到,Γ_A 表示以 A 为振幅的振动轨线,它的周期为 $T(A)$;而 $\widetilde{\Gamma}_1$ 和 $\widetilde{\Gamma}_2$ 表示单摆进动的轨线. 请注意,这相图关于 x 以 2π 为周期.(0,0) 点和(π,0) 点是单摆的二个静止点;前

者是稳定的，即附近的轨线不能远离它，而后者是不稳定的. ▌

【例 2】 悬链线方程：

设有一理想的柔软而不能伸缩的细线，把它悬挂在二个定点 P_1 和 P_2 之间. 又设这细线只受重力作用，而没有别的载荷. 试求悬链线的形状 $y = y(x)$.

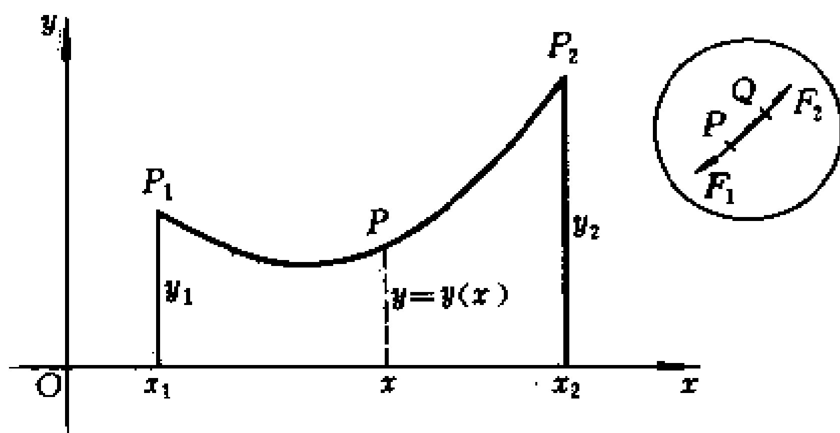


图 5-6

参看图 5-6，设定点 P_1 和 P_2 在(x,y) 平面内，x 轴表示水平方向，而 y 轴垂直向上.

令 γ 表示单位长细线的重量. 任取悬链线 $y = y(x)$ 上的一小段 $\widehat{PQ}$，设 P 和 Q 的坐标分别为$(x,\ y(x))$和$(x + \Delta x,\ y(x + \Delta x))$，$\widehat{PQ}$ 的长度为 Δs，其中 s 表示弧段$\widehat{P_1P}$ 的长度. 则小段$\widehat{PQ}$ 所受的重力为

$$W = \gamma \cdot \Delta s, \qquad \text{（垂直向下）}$$

（参看图 5-6 右上角的附图）. 在$\widehat{PQ}$ 上的作用力除重力 W 外还有张力 F_1 和 F_2，它们分别在 P 点和 Q 点的切线方向. 令 F_1 和 F_2 的水平分量分别为 $H_1 = H(x)$ 和 $H_2 = H(x + \Delta x)$，而垂直分量分别为 $V_1 = V(x)$ 和 $V_2 = V(x + \Delta x)$. 则由平衡条件可知

$$H_2 - H_1 = 0, \quad V_2 - V_1 - W = 0.$$

由此推出

$$H(x) = \text{常数}\ H_0,$$

和

$$V(x + \Delta x) - V(x) = \gamma \cdot \Delta s.$$

再利用中值公式，我们得到

$$V'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \gamma \cdot \Delta s, \quad (0 < \theta < 1).$$

令 $\Delta x \to 0$，就有

$$V'(x) = \gamma \frac{ds}{dx}. \tag{1.14}$$

注意，弧长公式

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

和张力的方向，即

$$V(x) = H(x) y'(x) = H_0\, y'(x),$$

我们由(1.14)推出

$$H_0\, y''(x) = \gamma \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

由此得到悬链线 $y = y(x)$ 满足的微分方程

$$y'' = a \sqrt{1 + (y')^2}, \tag{1.15}$$

其中 $a = \gamma / H_0$ 是常数。

另外，悬链线 $y = y(x)$ 自然满足条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{1.16}$$

注意，这条件不同于初值条件 $(y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0)$；它叫作**边值条件**. 因此，求解悬链线的形状 $y = y(x)$ 就归结到求**边值问题**(1.15) + (1.16)的解.

微分方程(1.15)是一个二阶的自治系统，因此可按常规降阶. 不过对它还有更简捷的降阶法. 令 $z = y'$. 则(1.15)降为一阶方程

$$z' = a \sqrt{1 + z^2},$$

而且它是变量分离的. 容易求出它的通解

$$z = \operatorname{sh} a(x + C_1),$$

其中 C_1 是一个任意常数. 由此可再积分，得到(1.15)的通解

$$y=\frac{1}{a}\operatorname{ch}a(x+C_1)+C_2, \tag{1.17}$$

其中 C_2 是第二个任意常数.

利用通解(1.17)和边值条件(1.16)，我们得到

$$\begin{cases}\frac{1}{a}\operatorname{ch}a(x_1+C_1)+C_2=y_1,\\ \frac{1}{a}\operatorname{ch}a(x_2+C_1)+C_2=y_2.\end{cases}$$

由此可唯一确定任意常数 C_1 和 C_2，从而由(1.17)给出所求的解，它是一个双曲余弦函数.

看来好象问题已经解决. 其实不完全如此. 因为常数 a 依赖于未知的水平力 H_0，所以需要先确定 a，然后才能完全确定 C_1 和 C_2.

设悬链线的长度为 L，自然要求

$$L>\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.18}$$

利用曲线的弧长积分公式，我们有

$$\begin{aligned}L&=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}y''(x)dx\\&=\frac{1}{a}[\operatorname{sh}a(x_2+C_1)-\operatorname{sh}a(x_1+C_1)]\\&=\frac{2}{a}\operatorname{sh}\frac{a(x_2-x_1)}{2}\operatorname{ch}\frac{a(x_1+x_2)+2C_1}{2}.\end{aligned}$$

另外，由(1.17)得到

$$\begin{aligned}y_2-y_1&=\frac{1}{a}[\operatorname{ch}a(x_2+C_1)-\operatorname{ch}a(x_1+C_1)]\\&=\frac{2}{a}\operatorname{sh}\frac{a(x_2-x_1)}{2}\operatorname{sh}\frac{a(x_1+x_2)+2C_1}{2},\end{aligned}$$

由此推出

$$\sqrt{L^2-(y_2-y_1)^2}=\frac{2}{a}\operatorname{sh}\frac{a(x_2-x_1)}{2}. \tag{1.19}$$

注意，由(1.18)可知(1.19)的左端是一个正的常数 K_0，再令常数

$K_1 = x_2 - x_1 > 0$，则 $K_0 > K_1$. 因此，由(1.19)得到

$$\frac{K_0}{2}a = \operatorname{sh}\left(\frac{K_1}{2}a\right),$$

由此再利用简单的作图法，就可唯一地确定正数 a. ▌

【例 3】　二体问题：

地球绕太阳的运动历来是受人重视的问题之一. 为了简单起见，我们将不考虑其它天体(微小)的影响. 设太阳 S 位于惯性坐标系 (x,y,z) 的原点 O，而地球 E 的坐标向量为

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),$$

则 E 的运动速度和加速度分别为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)),\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t),\ \ddot{y}(t),\ \ddot{z}(t)).$$

令太阳和地球的质量分别为 m_S和 m_E. 则地球的惯性力为

$$m_E\,\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = m_E(\ddot{x}(t),\ \ddot{y}(t),\ \ddot{z}(t)).$$

另外，由牛顿的万有引力定律得知，地球受太阳的吸引力为

$$\boldsymbol{f}(t) = -G\frac{m_S m_E}{|\boldsymbol{r}(t)|^2}\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|},$$

其中 G 是万有引力常数，而 $|\boldsymbol{r}(t)|$ 表示 $\boldsymbol{r}(t)$ 的欧氏模，即

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + x^2(t)}.$$

再利用牛顿第二运动定律，我们得到地球的运动微分方程

$$m_E\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{f}(t),$$

亦即

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{Gm_S x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \\ \ddot{y} = -\dfrac{Gm_S y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \\ \ddot{z} = -\dfrac{Gm_S z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}. \end{cases} \tag{1.20}$$

它是一个自治的微分方程组，其中未知函数为 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 和 $z = z(t)$. 注意，这是一个 6 阶的微分方程组.

由力学的知识可知，地球的运动 $(x(t), y(t), z(t))$ 还决定于它的初始状态

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & y(t_0) = y_0, & z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) = u_0, & \dot{y}(t_0) = v_0, & \dot{z}(t_0) = w_0. \end{cases} \tag{1.21}$$

因此，为了解决地球的运动问题，我们需要求解初值问题(1.20)+(1.21)．由(1.20)可以得到

$$z\ddot{y} - y\ddot{z} = 0,$$

亦即

$$\frac{d}{dt}[z\dot{y} - y\dot{z}] = 0.$$

由此得到一个首次积分

$$z\dot{y} - y\dot{z} = C_1, \tag{1.22}$$

其中 C_1 是一个任意常数．类似地，还可以求出另外二个首次积分

$$x\dot{z} - z\dot{x} = C_2, \tag{1.23}$$

和

$$y\dot{x} - x\dot{y} = C_3, \tag{1.24}$$

这里 C_2 和 C_3 都是任意常数，以下设 $C_3 > 0$.

由(1.22)，(1.23)和(1.24)推出

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

这证明了地球运动的轨道永远在一个平面上；或者说，二体问题是一个平面问题．因此，我们不妨设地球的轨道永远在平面 $z = 0$ 上．这样一来，方程(1.20)就降为一个4阶方程

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu x(\sqrt{x^2 + y^2})^{-3} = 0, \\ \ddot{y} + \mu y(\sqrt{x^2 + y^2})^{-3} = 0, \end{cases} \tag{1.25}$$

其中常数 $\mu = Gm_S$．由此可得

$$(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) + \mu(x\dot{x} + y\dot{y})(\sqrt{x^2 + y^2})^{-3} = 0,$$

亦即

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0.$$

由此又得到一个首次积分

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4. \tag{1.26}$$

利用极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则(1.26)变成

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=C_4, \tag{1.27}$$

而首次积分(1.24)变成

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=-C_3. \tag{1.28}$$

然后,由(1.27)和(1.28)可知

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2-\left(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}\right)^2,$$

它蕴含积分常数 C_4 必须满足

$$C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2>0.$$

因此,我们有

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{C_4-\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2-\left(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}\right)^2}.$$

再利用(1.28)推出

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2-\left(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}\right)^2},$$

亦即

$$\frac{d\left(\frac{C_3}{r}\right)}{\pm\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2-\left(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}\right)^2}}=d\theta.$$

由此,我们得到

$$\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2}}=\theta-C_5,$$

从上式解出 r 作为 θ 的函数，得到

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{1.29}$$

其中常数

$$e = \frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4 + \left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2} > 0, \quad p = \frac{C_3^2}{\mu} > 0, \quad \theta_0 = C_5.$$

由平面解析几何的知识得知方程(1.29)表示一条二次曲线．当正数 $e < 1$ 时，它是椭圆；当 $e = 1$ 时，它是抛物线；当 $e > 1$ 时，它是双曲线．我们知道，地球绕太阳的情形应该属于椭圆轨道，亦即 $0 < e < 1$．▌

在历史上，牛顿就是利用上述数学推导第一次在理论上肯定了地球绕太阳运动的轨道是一个椭圆，从而澄清了当时流行的某些邪说．例如，那时有许多人(包括牛顿)曾相信，由于太阳的巨大引力，地球将盘旋于太阳，而最终跌落到太阳上．

另外，利用上面类似的数学推演，牛顿还证明了由 Kepler 总结的经过长期天文观察得到的三个著名的行星运动定律．由于篇幅所限，此处从略．有兴趣的读者可参考有关的理论力学著作．

习　题　5-1

1. 利用线性单摆方程测量你所在地的重力常数 g．

2. 在非线性单摆方程中取 $\sin x$ 的三次近似，即

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3,$$

则有单摆的三次近似方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) = 0.$$

由此证明单摆振动是不等时的，而且作相图说明单摆可以产生进动．

3. 在悬链线问题中当 $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 时如何处理？

4. 微分方程(1.20)表示二体问题的运动方程．在上面求解过程中，试适当选择积分常数，使运动 $(x(t), y(t), z(t))$ 的轨道在一条直线上并且趋向 O 点(即二体发生碰撞)；或者使轨道是一圆周．

§2. n 维线性空间中的微分方程

设 n 阶微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{2.1}$$

这里 x 是自变量，y 是一个未知函数.

令 $y_1=y$，$y_2=\frac{dy}{dx}$，…，$y_n=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$，则微分方程(2.1)等价于下列 n 阶标准微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\ \frac{dy_n}{dx}=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{cases} \tag{2.2}$$

这里等价的含义是：若函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(2.1)的解，则由它导出的函数组 $y_1=\varphi(x)$，$y_2=\varphi'(x)$，…，$y_n=\varphi^{(n-1)}(x)$ 是方程组(2.2)的解；反之，若函数组 $y_1=\varphi_1(x)$，$y_2=\varphi_2(x)$，…，$y_n=\varphi_n(x)$ 是方程组(2.2)的解，则其中的第一个函数 $y=\varphi_1(x)$ 是方程(2.1)的解.

又设微分方程组

$$\begin{cases}\frac{d^2u}{dx^2}=F\left(x,u,\frac{du}{dx},v,w,\frac{dw}{dx},\frac{d^2w}{dx^2}\right),\\ \frac{dv}{dx}=G\left(x,u,\frac{du}{dx},v,w,\frac{dw}{dx},\frac{d^2w}{dx^2}\right),\\ \frac{d^3w}{dx^3}=H\left(x,u,\frac{du}{dx},v,w,\frac{dw}{dx},\frac{d^2w}{dx^2}\right),\end{cases} \tag{2.3}$$

其中未知函数 u，v，w 的最高微商的阶数分别为 2，1，3. 因此，微分方程组(2.3)的阶数 $n=6$.

令

$$\begin{cases} y_1 = u, \quad y_2 = \dfrac{du}{dx}, \\ y_3 = v, \\ y_4 = w, \quad y_5 = \dfrac{dw}{dx}, \quad y_6 = \dfrac{d^2w}{dx^2}, \end{cases}$$

则方程组(2.3)等阶于下面的6阶标准微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_6), \\ \dfrac{dy_3}{dx} = G(x, y_1, \cdots, y_6), \\ \dfrac{dy_4}{dx} = y_5, \\ \dfrac{dy_5}{dx} = y_6, \\ \dfrac{dy_6}{dx} = H(x, y_1, \cdots, y_6). \end{cases} \tag{2.4}$$

微分方程组(2.2)和(2.4)的特点是未知函数的个数等于微分方程本身的阶数.这类微分方程可以写成如下的标准形式

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是变元 $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 在某个区域 D 内的连续函数.

以下我们采用向量的记号,把微分方程组(2.5)写成更简洁的形式.为此,令 n 维向量

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

又令

$$f_i(x, y) = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

和

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_n(x, y)).$$

则微分方程组(2.5)的向量形式为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.6}$$

其中 $f(x, y)$ 是关于变元 $(x, y) \in D$ 的一个 n 维向量值函数；也就是说，(2.6)是 n 维线性空间 V^n 中的一个微分方程．这里假定 V^n 是实数域上的线性空间．

为了确定微分方程(2.6)的解，还需附加初值条件

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.7}$$

其中的初值点 $(x_0, y_0) \in D$．这样一来，我们就须要研究初值问题(2.6)+(2.7)．

当 $n = 1$ 时，在第三章中已经证明了这种初值问题解的存在性定理以及唯一性定理（见毕卡定理和皮亚诺定理）．

当 $n > 1$ 时，只需要在线性空间 V^n 中对向量引进适当的模，就可以用同样的方法对上述初值问题证明相应的毕卡定理和皮亚诺定理．

在 V^n 中任取 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，令 $|y|$ 表示 y 的模（范数），它可以按下列不同的方式来定义：

(1) $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$；

(2) $|y| = |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|$；

(3) $|y| = \max\{|y_1|, |y_2|, \cdots, |y_n|\}$．

上面的第一种定义称为欧氏模．在后两种定义中，等式右边的 $|\cdot|$ 只表示数量的绝对值，这种符号上的混杂是常见的，但需注意，不要引起概念上的谬误．以下我们可以按上述三种定义中的任何一种来理解 n 维向量的模 $|\cdot|$，其实它们都是等价的．这里等

价的含意是：按其中任何一种定义得出的有关函数的连续性、可微性等性质都是相同的. 通常定义(3)在应用上比较方便. 模的基本性质有下面两条：

1°. 对任何 $y \in V^n$, $|y| \geqslant 0$；而且 $|y| = 0$ 当且仅当 $y = 0$；

2°. 对任何 $y, z \in V^n$, $|y + z| \leqslant |y| + |z|$.

在线性空间 V^n 中一旦引进模(范数)以后，V^n 就叫 n 维线性有模(赋范)空间. 而在 n 维线性有模空间中用同样的方法可以建立大家熟知的微积分学和无穷级数一致收敛的概念，并证明类似的 Ascoli 引理. 自然，对函数 $f(x, y)$，可以定义在区域

$$R: \quad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

上的连续性以及相应的李氏条件

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant L|y - z|,$$

其中 $L \geqslant 0$ 是李氏常数.

这样一来，在 V^n 中我们已经建立了在第三章中证明毕卡定理和皮亚诺定理时用到过的所有有关的概念，而且它们在形式上也是完全一样的. 所以我们可以照搬那里的方法来证明这里 n 维空间 V^n 中有关初值问题：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

解的毕卡定理和皮亚诺定理. 具体的细节留作习题.

最后指出一点，如果在方程(2.5)中函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 都是对于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性函数，即

$$f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x) y_i + e_k(x),$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$，则微分方程(2.5)[或(2.6)]叫作**线性微分方程组**；否则，叫作**非线性微分方程组**.

线性微分方程组

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x) y_i + e_k(x), \tag{2.8}$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的向量形式可以写成

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{y}A(x) + \boldsymbol{e}(x), \tag{2.9}$$

其中行向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 和 $\boldsymbol{e}(x) = (e_1(x), e_2(x), \cdots, e_n(x))$，而矩阵

$$A(x) = \left(a_{ik}(x) \right)_{n \times n}.$$

如果不是采用行向量的写法，而是采用列向量的写法，即

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}(x) = \begin{pmatrix} e_1(x) \\ e_2(x) \\ \vdots \\ e_n(x) \end{pmatrix},$$

则线性微分方程组(2.8)的向量形式为

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}(x). \tag{2.10}$$

注意，(2.10)在形式上与(2.9)是有区别的. 在一般的文献上多采用列向量(2.10)的形式.

顺便说一下，设 $A(x)$ 和 $\boldsymbol{e}(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上是连续的，则利用第三章的方法容易证明线性微分方程(2.10)满足任何初值条件

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad (a < x_0 < b, \quad \boldsymbol{y}_0 \in V^n)$$

的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上存在而且唯一.

习　题　5-2

1. 把单摆方程(1.7)，悬链线方程(1.15)和二体运动方程(1.20)分别写成标准微分方程组.

2. 对 n 维向量形式的微分方程，叙述相应的毕卡存在和唯一性定理以及皮亚诺存在定理，并写出证明的主要步骤.

3. 对 n 阶线性微分方程组的初值问题，试叙述并证明解的存在和唯一性定理.

§3. 解对初值和参数的连续依赖性

大家知道，微分方程的解不仅决定于微分方程本身，而且也决定于解的初值.通常，微分方程包含某些参数.因此，我们将考虑微分方程的解对初值和参数的依赖性.

例如，线性单摆方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0$$

满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=v_0$$

的解为

$$x=x_0\cos a(t-t_0)+\frac{v_0}{a}\sin a(t-t_0).$$

显然，它对初值 t_0，x_0，v_0 和参数 a 是连续的，而且也是连续可微的.注意，参数 $a=\sqrt{g/l}$ 随重力加速度 g 和单摆长度 l 而定.由于初值 x_0，v_0 和常数 g，l 都是由测量得到的，而任何测量都难免存在误差.所以解对 x_0，v_0 和 a 的连续性就有着重要的实际意义：只要误差足够小，对应的解就不会有大的偏差.

上面这个简单的结论对非线性单摆方程也应该成立，但它的数学证明并不如此容易了.以下将一般地讨论 n 阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda) \tag{3.1}$$

满足初值条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{3.2}$$

的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0;\lambda)$ 对初值 (x_0,y_0) 和参数 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 的依赖性.本节先考虑连续依赖性.

作变换

$$t=x-x_0,\quad u=y-y_0,$$

则微分方程(3.1)变成

$$\frac{du}{dt} = f(t + x_0, u + y_0, \lambda), \tag{3.3}$$

而相应的初值条件(3.2)变成

$$u(0) = 0. \tag{3.4}$$

注意，原来的初值 x_0, y_0 在微分方程(3.3)中和 λ 一样都以参数的形式出现，而(3.4)是一个固定的初值条件. 因此，不失一般性，我们只讨论初值问题

$$(E_\lambda): \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad y(0) = 0$$

的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 对参量 λ 的依赖性. 以下设 λ 是 m 维的参数向量.

我们进行讨论的思路是：先证明初值问题 (E_λ) 的毕卡序列 $\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 对参数 λ 的连续性(可微性)，再利用一致收敛性证明 $\varphi_k(x,\lambda)$ 的极限函数，即 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 对参数 λ 的连续性(可微性).

定理 1 设 n 维向量值函数 $f(x, y, \lambda)$ 在区域

$$G: \qquad |x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |\lambda - \lambda_0| \leqslant c$$

上是连续的，而且对 y 满足李氏条件

$$|f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

其中常数 $L \geqslant 0$. 令正数 M 为 $|f(x, y, \lambda)|$ 在区域 G 的一个上界，而且令

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

则初值问题 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在区域

$$D: \qquad |x| \leqslant h, \quad |\lambda - \lambda_0| \leqslant c$$

上是连续的.

证明 由于这证明与第三章中毕卡定理的证明非常类似，我们只列出下面的要点：

(1) 初值问题 (E_λ) 等价于积分方程

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda)dx. \tag{3.5}$$

(2) 由此可以作毕卡序列

$$\varphi_{k+1}(x,\lambda)=\int_0^x f(x,\varphi_k(x,\lambda),\lambda)dx,\quad (k=0,1,2,\cdots)\tag{3.6}$$

其中 $\varphi_0(x,\lambda)=0$ 和 $(x,\lambda)\in D$.

(3) 用归纳法证明 $\varphi_k(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda)\in D$ 是连续的.

(4) 用归纳法证明

$$|\varphi_{k+1}(x,\lambda)-\varphi_k(x,\lambda)|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

它蕴含毕卡序列 $\varphi_k(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda)\in D$ 是一致收敛的.

(5) 令

$$\varphi(x,\lambda)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x,\lambda),\quad (x,\lambda)\in D.$$

则 $y=\varphi(x,\lambda)$ 是(E_λ)的唯一解,它对 $(x,\lambda)\in D$ 是连续的.

定理 1 由此得证. ▌

推论　设 n 维向量值函数 $f(x,y)$ 在区域

$$R:\quad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

上连续,而且对 y 满足李氏条件. 则微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\tag{3.7}$$

满足初值条件

$$y(x_0)=\eta\tag{3.8}$$

的解 $y=\varphi(x,\eta)$ 在区域

$$D:\quad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{2},\quad |\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}$$

上是连续的,其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},$$

而正数 M 为 $|f(x,y)|$ 在区域 R 上的一个上界. ▌

利用这个推论,可以对微分方程(3.7)在(x_0,y_0)点邻域内的积分曲线族作局部"拉直". 为此,考虑下面的变换

$$T:\qquad x=x,\quad y=\varphi(x,\eta);\quad (D\to R).$$

这是一个从区域 D 到区域 R 的连续变换. 根据解的唯一性，即

$$\varphi(x,\eta_1)\neq\varphi(x,\eta_2),\quad \text{只要 } \eta_1\neq\eta_2,$$

可知 T 是一对一的变换. 因此，T 是一个拓扑变换. 对于任意固定的 $\bar\eta$ $\left(|\bar\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}\right)$，变换 T 把区域 D 内的直线

$$L_{\bar\eta}:\qquad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{4},\quad \eta=\bar\eta$$

变换成微分方程(3.7)经过$(x_0,\bar\eta)$点的一条积分曲线

$$\Gamma_{\bar\eta}:\qquad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{2},\quad y=\varphi(x,\bar\eta),$$

(参看图 5-7).

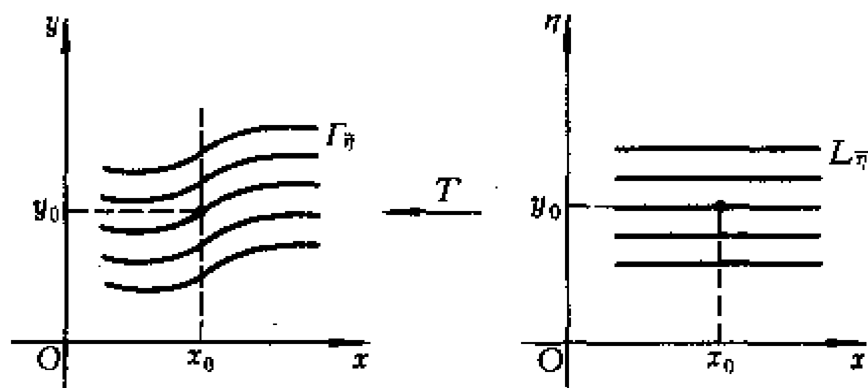


图 5-7　积分曲线族在常点附近的局部拉直($n=1$ 的情形)

亦即拓扑变换 T 把区域 D 内的平行直线族 L_η $\left(|\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}\right)$ 变成微分方程(3.7)在(x_0,y_0)邻域内的积分曲线族 Γ_η $\left(|\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}\right)$. 换句话说，$T$ 的逆变换 T^{-1} 把微分方程(3.7)在(x_0,y_0)邻域内的积分曲线族 Γ_η $\left(|\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}\right)$ 拉直了. 因此，在这个意义下微分方程(3.7)在(x_0,y_0)邻域内的积分曲线族可以**局部地**视

作平行直线族.

正象解的存在性可以从局部向整体扩展一样,解对初值(或参数)的连续依赖性也有下面的整体形式.

定理 2　设 n 维向量值函数 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 $(x, \boldsymbol{y})$ 空间内的某个开区域 G 上是连续的,而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足局部李氏条件. 假设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}(x)$ 是微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

的一个解,令它的存在区间为 J. 现在,在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$. 则存在常数 $\delta > 0$,使得对任何初值 $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$,

$$a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad |\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{\xi}(x_0)| \leqslant \delta,$$

柯西问题

$$(E): \qquad \frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x; x_0, \boldsymbol{y}_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上存在,并且它对 $(x, x_0, \boldsymbol{y}_0)$ 在闭区域

$$D_\delta: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad |\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{\xi}(x_0)| \leqslant \delta$$

上是连续的.

证明　我们仍利用毕卡逐次逼近法来证明这个定理. 下面仅指出证明中与局部情形的不同之处,而把细节留给有兴趣的读者.

注意到积分曲线段 $\Gamma: \{(x, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}(x), a \leqslant x \leqslant b\}$ 是 G 内的一个有界闭集. 因此,利用数学分析中的有限覆盖定理可知,存在 $\sigma > 0$,使得以 Γ 为"中心线"的闭"管状"邻域

$$\Sigma_\sigma: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\xi}(x)| \leqslant \sigma$$

含在开区域 G 内;并且 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 Σ_σ 内有整体李氏常数 L(见第三章 §3 附注 1). 这样,我们可以按常规构造 (E) 的毕卡序列:

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(x; x_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}_k(x; x_0, \boldsymbol{y}_0))dx, \tag{3.9}$$

而这里的唯一不同之处是 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 的选取为

$$\boldsymbol{\varphi}_0(x; x_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{\xi}(x) - \boldsymbol{\xi}(x_0). \tag{3.10}$$

我们要证明的是对 $k = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$|\varphi_k(x;\ x_0,\ y_0) - \xi(x)| < \sigma \tag{3.11}$$

和

$$\begin{aligned}&|\varphi_{k-1}(x;\ x_0,\ y_0) - \varphi_k(x;\ x_0,\ y_0)|\\ &\leqslant \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}|y_0 - \xi(x_0)|.\end{aligned} \tag{3.12}$$

（条件(3.11)保证用(3.9)进行的每一次迭代所得到的 φ_k 都不超出区域 Σ_σ，而(3.12)则保证毕卡序列的一致收敛性.）为此，我们取正数

$$\delta = \frac{1}{2}e^{-L(b-a)}\sigma,\quad（注意，\delta < \sigma）. \tag{3.13}$$

则当 $(x;\ x_0,\ y_0) \in D_\delta$ 时，可以归纳地证明(3.11)和(3.12)成立.

事实上，当 $k = 0$ 时，(3.11)可以从(3.10)和(3.13)直接得出；为了证明(3.12)对 $k = 0$ 为真，注意 $y = \xi(x)$ 是初值问题(E)的解，从而满足积分方程

$$\xi(x) = \xi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,\ \xi(x))dx.$$

因此，由(3.9)$(k = 0)$，(3.10)和上式可得

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x;\ x_0,\ y_0) - \varphi_0(x;\ x_0,\ y_0)\\ &= \int_{x_0}^{x}[f(x,\ \varphi_0(x;\ x_0,\ y_0)) - f(x,\ \xi(x))]dx,\end{aligned}$$

再利用李氏条件即可得出(3.12)对 $k = 0$ 成立.

现在设(3.11)和(3.12)对 $k \leqslant s-1$ 为真，则当 $k = s$ 并且 $(x;\ x_0,\ y_0) \in D_\delta$ 时，由(3.9)，(3.12)$(k \leqslant s-1)$ 和(3.13)可得

$$\begin{aligned}|\varphi_s(x;\ x_0,\ y_0) - \xi(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{s}[\varphi_k(x;\ x_0,\ y_0) - \\ &\qquad \varphi_{k-1}(x;\ x_0,\ y_0)] + [\varphi_0(x;\ x_0,\ y_0) - \xi(x)]\Big|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{s}\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}|y_0 - \xi(x_0)|\\ &\leqslant e^{L|x-x_0|}\delta \leqslant e^{L(b-a)}\delta < \sigma.\end{aligned}$$

因此,不等式(3.11)对 $k=s$ 为真. 至于(3.12)$(k=s)$,则可按常规由(3.9)式出发,利用李氏条件和归纳法假设得到.

最后指出,$\varphi_k(x;\ x_0,\ y_0)$ 在 D_δ 上是一致收敛的,从而易知它的极限函数 $\varphi(x;\ x_0,\ y_0)$ 就是满足定理要求的(E)的解. ▌

【附注】 利用定理2,我们可以把微分方程的积分曲线族在常点(即方程右端函数 $f(x,y)$ 在该点邻域内是连续的并且对 y 满足李氏条件)附近的"局部拉直"(见上面定理1的推论),推广为在积分曲线段$\{(x,y):\ y=\xi(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$附近一个"细长管域"内的"局部拉直".

习 题 5-3

1. 证明本节定理1的推论.

2. 设 $f(x,y)$ 在区域 R 上连续,而且微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

经过 R 内任何一点的积分曲线都是(存在)唯一的. 则上述微分方程的解对初值是连续依赖的.

3. 试举例说明,如果微分方程不满足解的唯一性条件,则它的积分曲线族在局部范围内也不能视作平行直线族.

§4. 解对初值和参数的连续可微性

本节将讨论微分方程的解对初值和参数的连续可微性. 如上节一样,不失一般性,我们只考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ \lambda) \tag{4.1}$$

满足初值条件

$$y(0)=0$$

的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 对参数 λ 的连续可微性.

定理3 设 $f(x,y,\lambda)$ 在区域

$$G: \quad |x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |\lambda - \lambda_0| \leqslant c$$

上连续，而且对 y 和 λ 有连续的偏微商. 则微分方程(4.1)满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解 $y = \varphi(x,\lambda)$ 在区域

$$D: \quad |x| \leqslant h, \quad |\lambda - \lambda_0| \leqslant c$$

上是连续可微的，其中正数 h 的定义同上节定理1.

证明 把上述微分方程的初值问题化成等价的积分方程

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda)dx. \tag{4.2}$$

然后作毕卡序列

$$\varphi_{k+1}(x,\lambda) = \int_0^x f(x, \varphi_k(x,\lambda), \lambda)dx, \tag{4.3}$$

$(k = 0,1,2,\cdots)$ 其中 $\varphi_0(x,\lambda) = 0$ 和 $(x,\lambda) \in D$.

因为定理3的条件蕴含定理1的条件，所以毕卡序列 $\varphi_k(x,\lambda)$ 在区域 D 上一致收敛到积分方程(4.2)的(唯一)解 $y = \varphi(x,\lambda)$.

[这里我们先声明一下，对于不熟悉向量分析的读者在理解下面的符号时或许有些困难. 在这种情况下，不妨假定 y 和 λ 都是纯量(即 $n = 1$ 和 $m = 1$)，那么一切都是很自然的.]

另一方面，用归纳法由(4.3)易证 $\varphi_k = \varphi_k(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda) \in D$ 是连续可微的，而且

$$\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial \lambda} = \int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi_k,\lambda)\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\varphi_k,\lambda)\right]dx, \tag{4.4}$$

$(k = 0,1,2,\cdots)$.

因此，为了证明 $y = \varphi(x,\lambda)$ 对 λ 有连续的偏微商 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x,\lambda)$，只须证明序列 $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda) \in D$ 是一致收敛的.

因为 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 G 上对 y 和 λ 有连续的偏微商，所以存在常数 $\alpha > 0$，使得不等式

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\lambda)\right| \leqslant \alpha, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)\right| \leqslant \alpha \tag{4.5}$$

在区域 G 上成立.

注意，$\varphi_0(x,\lambda)=0$. 因此，由(4.4)和(4.5)推出

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}\right|\leqslant\left|\int_0^x\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,0,\lambda)\right|dx\right|\leqslant\alpha|x|,$$

再利用归纳法容易证明

$$\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right|\leqslant\alpha|x|+\frac{(\alpha|x|)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\alpha|x|)^k}{k!},$$

$(k=1,2,\cdots)$. 由此推出不等式

$$\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right|\leqslant\beta\leqslant e^{\alpha h},\quad(k=1,2,\cdots)\tag{4.6}$$

对$(x,\lambda)\in D$成立.

对任意正整数s，令

$$v_{k,s}=\left|\frac{\partial\varphi_{k+s}}{\partial\lambda}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}\right|.$$

根据柯西准则，为了证明序列$\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}$对$(x,\lambda)\in D$的一致收敛性，我们只需证明当$k\to\infty$时序列$v_{k,s}$对$(x,\lambda)\in D$和$s=1,2,\cdots$一致趋于零.

利用(4.4)可以推出

$$v_{k+1,s}\leqslant\left|\int_0^x\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi,\lambda)\right|v_{k,s}dx\right|+d_{k,s}(x,\lambda),\tag{4.7}$$

其中

$$\begin{aligned}d_{k,s}(x,\lambda)=&\left|\int_0^x\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi_{k+s},\lambda)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi,\lambda)\right]\frac{\partial\varphi_{k+s}}{\partial\lambda}dx\right|\\&+\left|\int_0^x\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi,\lambda)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi_k,\lambda)\right]\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}dx\right|\\&+\left|\int_0^x\left[\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi_{k+s},\lambda)-\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi_k,\lambda)\right]dx\right|.\end{aligned}$$

注意，序列φ_k对$(x,\lambda)\in D$一致收敛于$\varphi=\varphi(x,\lambda)$，又偏微商$\dfrac{\partial f}{\partial y}$和$\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$对$(x,y,\lambda)\in G$是连续的. 这样，再利用(4.7)可见，当$k\to\infty$时$d_{k,s}(x,\lambda)$对$s=1,2,\cdots$，和$(x,\lambda)\in D$一致趋于0. 因此，存在常数

序列 $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, 使得

$$d_{k,s}(x,\lambda) < \varepsilon_k, \quad (k = 1,2,\cdots).$$

然后，由(4.7) 得到

$$v_{k+1,s} \leqslant \alpha \left| \int_0^x v_{k,s} dx \right| + \varepsilon_k, \tag{4.8}$$

注意，$v_{k,s} = v_{k,s}(x,\lambda) \geqslant 0$ 对 $(x,\lambda) \in D$ 是连续的. 并且由(4.6)可见

$$v_{k,s} \leqslant 2\beta, \quad (k,s = 1,2,\cdots). \tag{4.9}$$

另一方面，因为常数序列 $\varepsilon_k > 0$ 收敛于 0，所以序列

$$\delta_k = \sup \{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \cdots \}$$

单调趋于 0.

由(4.8) 和(4.9) 可见

$$v_{k+1,s} \leqslant 2\alpha\beta|x| + \varepsilon_k,$$

再利用(4.8) 推出

$$v_{k+2,s} \leqslant 2\beta \frac{(\alpha|x|)^2}{2!} + \varepsilon_k \alpha |x| + \varepsilon_{k-1}.$$

并且由归纳法可得

$$v_{k+m,s} \leqslant 2\beta \frac{(\alpha|x|)^m}{m!} + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{k+m-1-j} \frac{(\alpha|x|)^j}{j!}.$$

由此推出

$$v_{k+m,s} \leqslant 2\beta \frac{(\alpha|h|)^m}{m!} + e^{\alpha h}\delta_k. \tag{4.10}$$

显然，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得

$$2\beta \frac{(\alpha h)^m}{m!} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 只要\ m > \frac{N}{2}$$

和

$$e^{\alpha h}\delta_k < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 只要\ k > \frac{N}{2}.$$

因此，由(4.10)推出

$$v_{k+m,s}=v_{k+m,s}(x,\lambda)<\varepsilon,\quad 只要\ k,m>\frac{N}{2}$$

或

$$v_{k,s}<\varepsilon,\quad 只要\ k>N.$$

这就证明了 $v_{k,s}(x,\lambda)$ 对 $s=1,2,\cdots$ 和 $(x,\lambda)\in D$ 一致趋于 0. 从而序列 $\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda)\in D$ 是一致收敛的，而且有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(x,\lambda)=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda}(x,\lambda),$$

所以它对 $(x,\lambda)\in D$ 是连续的.

另外，由于 $y=\varphi(x,\lambda)$ 是积分方程的解，我们有

$$\varphi'_x(x,\lambda)=f(x,\varphi(x,\lambda),\lambda),$$

它对 $(x,\lambda)\in D$ 也是连续的. 这就证明了 $y=\varphi(x,\lambda)$ 对 $(x,\lambda)\in D$ 是连续可微的. 定理 3 到此证完. ▌

推论 设 n 维向量值函数 $f(x,y)$ 在区域

$$R:\quad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b,$$

上连续，而且对 y 有连续的偏微商 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=\eta\end{cases}$$

的解 $y=\varphi(x,\eta)$ 在区域

$$D:\quad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{2},\quad |\eta-y_0|\leqslant\frac{b}{2}.$$

上是连续可微的. ▌

【附注】 假设未知函数 y 和参数 λ 都是一维的，并且定理 3 及其推论的条件成立，则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),\quad y(x_0)=y_0 \tag{4.11}$$

的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 对初值 x_0,y_0 及参数 λ 的偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 和

$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 分别在它们有定义的区域内连续可微. 考虑与(4.11)等价的积分方程

$$\varphi(x;x_0,y_0,\lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)dx. \quad (4.12)$$

在(4.12)两侧分别对 x_0, y_0 和 λ 求偏导数,就可得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} A(x,x_0,y_0,\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}dx,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^{x} A(x,x_0,y_0,\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}dx,$$

和

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^{x}\left(A(x,x_0,y_0,\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + B(x,x_0,y_0,\lambda)\right)dx,$$

其中

$$A(x,x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda),$$

$$B(x,x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda).$$

因此, $z = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 满足微分方程

$$\frac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)z, \quad (4.13)$$

和初值 $z(x_0) = -f(x_0,y_0)$; $z = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 满足微分方程

$$\frac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)z, \quad (4.14)$$

和初值 $z(x_0) = 1$; 而 $z = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 满足微分方程

$$\frac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)z + B(x,x_0,y_0,\lambda), \quad (4.15)$$

和初值 $z(x_0) = 0$.

微分方程(4.13),(4.14)和(4.15)都是从原方程(4.11)导出来的,并且都是一阶线性的. 通常把这些方程分别叫作(4.11)关

于初值 x_0, y_0 和参数 λ 的**变分方程**.

【例 1】　设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是连续函数，而且初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.16}$$

的解为 $y = \varphi(x; x_0, y_0)$. 不解此初值问题，试求出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 和 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$.

解　利用上面的附注可知，$z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = -p(x)z, \\ z(x_0) = p(x_0)y_0 - Q(x_0). \end{cases}$$

因此，求解此初值问题，容易得出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = (p(x_0)y_0 - q(x_0))\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

类似地，可以求得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}. \quad ▌$$

应该指出，例 1 中能够完全求出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 和 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$，是由于(4.16) 是一个线性微分方程. 一般而言，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 和 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ 要依赖于原方程(4.11)的解 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$. 尽管如此，我们仍然可以利用它们作某些理论上的探讨，或对某些取定的 x_0 和 y_0 来算出这些偏导数. 请看下面的例子.

【例 2】　设函数 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sin(\lambda xy), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

的解. 试求 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=y_0=0}$，$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{x_0=y_0=0}$ 和 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{x_0=y_0=0}$.

解　从初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \lambda x\cos(\lambda x\varphi)z, \\ z(x_0) = -\sin(\lambda x_0 y_0) \end{cases}$$

[其中 $\varphi = \varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 是(4.17)的解]可以解得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = -\sin(\lambda x_0 y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x}\lambda x\cos(\lambda x\varphi)dx},$$

因此

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=y_0=0} = 0.$$

类似地，可从

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \lambda x\cos(\lambda x\varphi)z, \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x}\lambda x\cos(\lambda x\varphi(x;x_0,y_0,\lambda))dx}.$$

再注意 $\varphi(x,0,0,\lambda) \equiv 0$，因此

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right|_{x_0=y_0=0} = e^{\int_0^x\lambda x dx} = e^{\frac{\lambda}{2}x^2}.$$

利用类似的方法，读者不难得出

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{x_0=y_0=0} = 0. \quad ∎$$

最后，我们指出，附注中的结论在高维的情形也成立. 见本节的习题 1 和习题 2.

习　题　5-4

1. 利用定理 3，证明 $z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ 满足线性微分方程

$$\frac{dz}{dx} = A(x,\lambda)z + B(x,\lambda)$$

和初值条件

$$z(x_0,\lambda) = 0,$$

其中

$$A(x,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x,\lambda),\lambda), \quad B(x,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\varphi(x,\lambda),\lambda).$$

（注意，当 y 和 λ 分别为 n 维列向量和 m 维列向量时，$A(x,\lambda)$，$B(x,\lambda)$ 和 $z(x,\lambda)$ 分别为 $n\times n$ 矩阵，$n\times m$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵.）

2. 在本节最后的推论中，试求 $z = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(x,\eta)$ 所满足的微分方程和初值条件.（只要求作形式的计算）

3. 设纯量函数 $y = y(x,\eta)$（η 为实参数）是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$$

满足初值条件 $y(0) = \eta$ 的解. 证明：不等式

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta) > 0$$

对一切 x 和 η 都成立.

第六章　线性微分方程组

许多实际问题的数学模型表现为很复杂的非线性微分方程组. 如果用近似法把它们简化为线性微分方程组，往往可以获得简捷的解答(如上一章单摆之例). 所以本章讨论的线性微分方程组的一般理论和一些解法在应用中有重要的地位. 此外，它们也是进一步研究非线性微分方程组的基础.

我们在§1首先介绍线性微分方程组的一般理论，在§2再讨论常系数线性微分方程组的初等积分法，并在§3把上两节的结果应用到高阶线性微分方程，而在§4简要地引进算子法和拉普拉斯(Laplace，1749—1827)变换法.

§1. 一般理论

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+f_i(x),\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中系数函数 $a_{ij}(x)$ 和 $f_i(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $a<x<b$ 上都是连续的. 在上一章的 §2 中我们已指出，只要采用矩阵和向量的记号：

$$A(x)=\Big(a_{ij}(x)\Big)_{n\times n}$$

和

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_n(x)\end{pmatrix},$$

就可以把上面的线性微分方程组写成向量的形式

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x). \tag{1.1}$$

当 $f(x)\not\equiv 0\ (a<x<b)$ 时，它是**非齐次线性微分方程组**；当 $f(x)\equiv 0$ 时，即得(相应的) **齐次线性微分方程组**

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y. \tag{1.2}$$

我们在这里指出 n 阶线性微分方程组(1.1) 在形式上与第二章 §3 的一阶线性微分方程(3.1) 是相似的. 本节将阐明，这种相似性不仅是在形式上，而且第二章 §3 中有关一阶线性微分方程(3.1) 的性质 1 — 5 和通解公式(3.5) 都可推广到这里的 n 阶线性微分方程组(1.1).

下面的定理是我们的理论基础，其证明要点与第三章定理 1 相同(注意，由 $A(x)$ 的连续性可知，在 x 的任意有限区间上，函数 $A(x)y$ 对 y 满足李氏条件).

存在和唯一性定理 线性微分方程组(1.1) 在区间 $a<x<b$ 上有并且只有一个满足初值条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{1.3}$$

的解 $y=y(x)$，其中 $x_0\in(a,b)$ 和 $y_0\in R^n$ 是任意给定的. ▌

在讨论非齐次线性微分方程组(1.1) 之前，我们先研究齐次线性微分方程组(1.2).

1.1　齐次线性微分方程组

引理 1 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是齐次线性微分方程组(1.2) 的解. 则它们的线性组合

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{1.4}$$

也是方程组(1.2)的解，其中 C_1 和 C_2 是实的任意常数.

证明 只要把(1.4)直接代入线性微分方程组(1.2)就得到一个恒等式. ▌

现在，考虑集合

$$\mathscr{S} = \left\{ \text{微分方程组(1.2)在区间 } a < x < b \text{ 上的一切解} \right\}.$$

则引理1已证明：集合 $\mathscr{S}$ 是一个线性空间. 所以我们可以用线性代数的语言来描述 $\mathscr{S}$ 的结构.

引理 2 $\mathscr{S}$ 是一个 n 维线性空间.

证明 令 $x_0 \in (a, b)$. 则由上面的存在和唯一性定理推出，对于任何常数向量 $\boldsymbol{y}_0 \in R^n$，在 $\mathscr{S}$ 中存在唯一的元素 $\boldsymbol{y}(x)$，使得 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. 这样一来，我们就得到一个映射

$$H: \quad R^n \to \mathscr{S} \quad (\text{把 } \boldsymbol{y}_0 \text{ 映到 } \boldsymbol{y}(x)). \tag{1.5}$$

显然，对于任何 $\boldsymbol{y}(x) \in \mathscr{S}$，我们有.

$$\boldsymbol{y}(x_0) \in R^n, \quad \text{并且} \quad H(\boldsymbol{y}(x_0)) = \boldsymbol{y}(x).$$

所以映射 H 是满的. 又对于任意 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in R^n$，令

$$\boldsymbol{y}_1(x) = H(\boldsymbol{y}_1), \quad \boldsymbol{y}_2(x) = H(\boldsymbol{y}_2).$$

则由解的唯一性可以证明：

$$\boldsymbol{y}_1(x) \neq \boldsymbol{y}_2(x), \quad (a < x < b), \quad \text{当且仅当} \quad \boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_2.$$

所以映射 H 也是一对一的. 另外，由引理1和解的唯一性推出

$$H(C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2) = C_1 H(\boldsymbol{y}_1) + C_2 H(\boldsymbol{y}_2),$$

亦即映射 H 是线性的.

因此，H 是一个从 R^n 到 $\mathscr{S}$ 的同构映射，它把线性空间 R^n 的结构迁移到线性空间 $\mathscr{S}$. 换句话说，只就线性空间的结构而言，它们是完全一样的，即 $\mathscr{S} \cong R^n$. 所以 $\mathscr{S}$ 的维数是 n，这里 n 等于微分方程组(1.2)的阶数. ▌

映射(1.5)有明显的几何意义：映射

$$H^{-1}: \quad \mathscr{S} \to R^n$$

把方程组(1.2)在 $n+1$ 维空间 $(x,\boldsymbol{y})$ 中的积分曲线 Γ: $\{(x,\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)\in\mathscr{S}\}$ 映到它与 n 维超平面 Σ_{x_0}: $\{(x,\boldsymbol{y})|x=x_0\}$ 的交点 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}(x_0)$. 由于 $A(x)$ 在 $a<x<b$ 上连续,所以对于任意 $x_0\in(a,b)$, Γ 与 Σ_{x_0} 都是"横截"相交的;再利用初值问题解的唯一性可知,映射 H^{-1} 是 1-1 的. 图 6-1 和图 6-2 分别显示了 $n=1$ 和 $n=2$ 两种情形(参见第一章 §2).

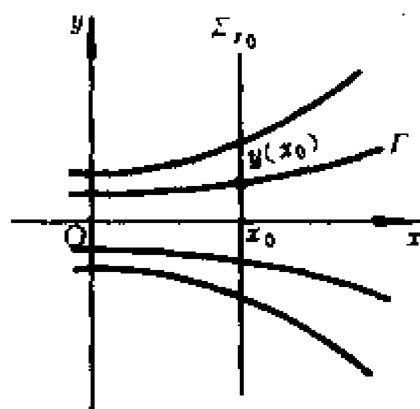


图 6-1　($n=1$)

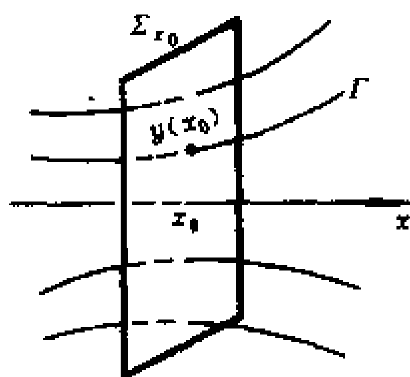


图 6-2　($n=2$)

注意,线性空间 R^n 有唯一的零向量 $\mathbf{0}$;而线性空间 $\mathscr{S}$ 也有唯一的零元素,为了方便仍记作 $\mathbf{0}$,亦即 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ $(a<x<b)$ 是齐次线性微分方程组(1.2)的零解. 易知 $H(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 请留心记号 $\mathbf{0}$ 在不同场合的含意.

令 $\boldsymbol{y}_k\in R^n$ 和 $\boldsymbol{y}_k(x)=H(\boldsymbol{y}_k)$, $(k=1,\cdots,m)$. 则 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 在 R^n 中的线性无关性(即 $C_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+C_m\boldsymbol{y}_m=\mathbf{0}$ 蕴含 $C_1=0,\cdots,C_m=0$) 等价于 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_m(x)$ 在 $\mathscr{S}$ 中的线性无关性(即 $C_1\boldsymbol{y}_1(x)+\cdots+C_m\boldsymbol{y}_m(x)=\mathbf{0}$, $a<x<b$ 蕴含 $C_1=0,\cdots,C_m=0$).

现在,我们来证本节的主要结论.

定理 1　齐次线性微分方程组(1.2)在区间 $a<x<b$ 上有 n 个线性无关的解

$$\varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x), \tag{1.6}$$

而且它的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \tag{1.7}$$

其中 $C_1, \cdots, C_n$是任意常数.

证明 由引理2可知，$\mathscr{S}$有一个基(1.6)，它的线性组合生成整个线性空间 $\mathscr{S}$. 这就是说，(1.7) 式表示齐次线性微分方程组 (1.2) 的通解. ▌

通常称齐次线性微分方程组(1.2) 的 n 个线性无关的解为一个**基本解组**. 因此，求(1.2) 的通解只须求它的一个基本解组.

假设已知

$$\boldsymbol{y}_1(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x) \tag{1.8}$$

是微分方程组(1.2) 的 n 个解. 则问题归于判别它们是否线性无关. 下面介绍一个在理论上比较简明的判别法(定理 2).

设在(1.8) 中诸解的分量形式为

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

称行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

为解组(1.8) 的**朗斯基(Wronsky) 行列式**.

引理 3 解组(1.8) 的朗斯基行列式满足下面的**刘维尔公式**

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}A(x)dx},\quad (a < x < b), \tag{1.9}$$

其中 $x_0 \in (a,b)$，而 $\mathrm{tr}A(x)$ 表示矩阵 $A(x)$ 的迹，即

$$\operatorname{tr} A(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x).$$

证明 利用行列式的基本性质可得

$$\frac{dW}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot W=\operatorname{tr} A(x) \cdot W,$$

这是关于 W 的一阶线性微分方程. 由此解出 W,即得(1.9). ∎

【附注 1】 由刘维尔公式(1.9) 可见,解组(1.8) 的朗斯基行列式 $W(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上只有两种可能:恒等于零,或恒不等于零. 下面的定理说明,这两种可能性分别相应于解组(1.8) 的线性相关与线性无关性.

定理 2 线性微分方程组(1.2) 的解组(1.8) 是线性无关的充要条件为

$$W(x) \neq 0, \quad (a<x<b). \tag{1.10}$$

证明 由刘维尔公式可知,条件(1.10) 等价于 $W(x_0) \neq 0$,而它又等价于初值向量组

$$\boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0) \tag{1.11}$$

在 R^n 中是线性无关的. 从引理 2 的证明中可见,

$$H(C_1\boldsymbol{y}_1(x_0)+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n(x_0))=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n(x).$$

因此,利用 $H(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 易知向量组(1.11) 在 R^n 中是线性无关的,当且仅当解组(1.8) 在 $\mathscr{S}$ 中是线性无关的. ▌

推论 1 解组(1.8) 是线性相关的充要条件为

$$W(x)\equiv 0,\quad (a<x<b).\ ▌$$

注意,在应用中我们可以在某个特殊点 x_0 计算 $W(x_0)$,看它是否不等于零,就可得知解组(1.8) 是否线性无关.

【例 1】 验证微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2x & \frac{1}{2}\sin 2x-1\\ \frac{1}{2}\sin 2x+1 & \sin^2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\tag{1.12}$$

的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^x\cos x\\e^x\sin x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

解 不难验证

$$\begin{pmatrix}e^x\cos x\\e^x\sin x\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}\tag{1.14}$$

是齐次线性微分方程组(1.12) 在区间 $-\infty<x<\infty$ 上的两个解;而且它们的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x=0$ 处的值为

$$W(0)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

所以(1.14) 是一个基本解组,从而(1.13) 是通解. ▌

最后,我们顺便引进一些记号,它们将为今后的讨论提供方便的服务.

对应于解组(1.8),令矩阵

$$Y(x)=\Big(y_{ij}(x)\Big)_{n\times n},$$

它叫作方程(1.2) 的**解矩阵**. 易知

$$\frac{dY(x)}{dx}=\left(\frac{dy_{ij}(x)}{dx}\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)y_{kj}(x)\right)_{n\times n}$$
$$=\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}\left(y_{ij}(x)\right)_{n\times n}=A(x)Y(x).$$

亦即方程(1.2)的解矩阵$Y(x)$是方程(1.2)的矩阵解. 反之亦然.

当解组(1.8)是一个基本解组时，称相应的解矩阵$Y(x)$为一个**基(本)解矩阵**. 若已知方程(1.2)的一个基解矩阵$\Phi(x)$，则由定理1可知，它的通解为

$$y=\Phi(x)\mathbf{C},\tag{1.15}$$

其中$\mathbf{C}$是n维的任意常数列向量.

从定理1、定理2和(1.15)式，我们不难得到下面的结果.

推论2 1) 设$\Phi(x)$是方程(1.2)的一个基解矩阵，则对于任一个非奇异的n阶常数矩阵C，矩阵

$$\Psi(x)=\Phi(x)C\tag{1.16}$$

也是(1.2)的一个基解矩阵；

2) 设$\Phi(x)$和$\Psi(x)$都是方程(1.2)的基解矩阵，则必存在一个非奇异的n阶常数矩阵C，使得(1.16)成立. ▌

1.2 非齐次线性微分方程组

现在，我们可以利用上面1.1的结果来推导非齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)\tag{1.1}$$

的通解结构.

引理4 如果$\Phi(x)$是与(1.1)相应的齐次线性微分方程组(1.2)的一个基解矩阵，$\varphi^*(x)$是(1.1)的一个特解，则(1.1)的任一解$y=\varphi(x)$可以表示为

$$\varphi(x)=\Phi(x)\mathbf{C}+\varphi^*(x),$$

其中$\mathbf{C}$是一个与$\varphi(x)$有关的常数列向量.

证明 容易验证 $\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\varphi}^*(x)$ 是(1.2)的一个解.因此,由(1.15)可知,存在常数列向量 $\mathbf{C}$,使得

$$\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\varphi}^*(x)=\Phi(x)\mathbf{C},$$

这正是所要的证明. ▌

引理 4 说明,为了得出(1.1)的通解,需要知道(1.2)的一个基解矩阵 $\Phi(x)$ 和(1.1)的一个特解 $\boldsymbol{\varphi}^*(x)$. 然而,利用下述**常数变易法**,我们只要知道 $\Phi(x)$ 就足够了.

假定(1.1)有如下形式的特解

$$\boldsymbol{\varphi}^*(x)=\Phi(x)\mathbf{C}(x), \tag{1.17}$$

其中 $\mathbf{C}(x)$ 是待定的向量函数. 把(1.17)代入方程(1.1),得到

$$\Phi'(x)\mathbf{C}(x)+\Phi(x)\mathbf{C}'(x)=A(x)\Phi(x)\mathbf{C}(x)+\mathbf{f}(x). \tag{1.18}$$

另一方面,由于 $\Phi(x)$ 是(1.2)的解矩阵,所以

$$\Phi'(x)=A(x)\Phi(x).$$

因此,可从(1.18)消去相应的项,得到

$$\Phi(x)\mathbf{C}'(x)=\mathbf{f}(x). \tag{1.19}$$

又由于 $\Phi(x)$ 是(1.2)的基解矩阵,所以它的朗斯基行列式 $\det\Phi(x)\neq 0\ (a<x<b)$. 这蕴含 $\Phi(x)$ 是可逆矩阵. 以 $\Phi^{-1}(x)$ 左乘(1.19)的两侧,得出

$$\mathbf{C}'(x)=\Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x),$$

从而

$$\mathbf{C}(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

把上式代回(1.17)式,就得到非齐次线性微分方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\varphi}^*(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds. \tag{1.20}$$

这样我们就得到下面的

引理 5 设 $\Phi(x)$ 是(1.2)的一个基解矩阵,则(1.20)式给出非齐次线性微分方程组(1.1)的一个特解. ▌

结合引理 4 和引理 5,我们就有下面的结论.

定理 3　设 $\Phi(x)$ 是(1.2)的一个基解矩阵，则非齐次线性微分方程组(1.1)在区间 $a<x<b$ 上的通解可以表示为

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\left(\mathbf{C}+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds\right),\qquad(1.21)$$

其中 $\mathbf{C}$ 是 n 维的任意常数列向量；而且(1.1)满足初值条件 $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$ 的解为

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds,\qquad(1.22)$$

其中 $x_0\in(a,b)$. ▌

【例 2】　求解初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2x & \dfrac{1}{2}\sin2x-1\\ \dfrac{1}{2}\sin2x+1 & \sin^2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\end{cases}$$

解　从例 1 知道，相应齐次线性微分方程组有一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^x\cos x & -\sin x\\ e^x\sin x & \cos x\end{pmatrix}.$$

容易求出

$$\Phi^{-1}(x)=\begin{pmatrix}e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix},\quad \Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

利用公式(1.22)，就得到所求初值问题的解为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}&=\Phi(x)\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}e^{-s}\cos s & e^{-s}\sin s\\ -\sin s & \cos s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\end{pmatrix}ds\right]\\ &=\Phi(x)\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}e^{-s}\\0\end{pmatrix}ds\right]\\ &=\begin{pmatrix}e^x\cos x & -\sin x\\ e^x\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-e^{-x}\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}(e^x-1)\cos x-\sin x\\(e^x-1)\sin x+\cos x\end{pmatrix}.\quad \blacksquare$$

【附注 2】 公式(1.21)和(1.22)通常叫作非齐次线性微分方程组的**常数变易公式**.它们是第二章§3中相应公式(3.5)和(3.8)的推广.但是两者有一个很大的区别:那里的(3.5)和(3.8)对一阶线性方程提供了实际求解的**计算公式**;而这里的(1.21)和(1.22)却依赖于方程组(1.2)的一个基解矩阵$\Phi(x)$.一般而言,我们无法求出$\Phi(x)$的有限形式(象例2那样的简单情形并不多见).也就是说,(1.21)和(1.22)所提供的仅是一种**结构公式**.尽管如此,它们在微分方程以及相关的其它数学分支中(特别在一些理论问题的研究中)仍是常用的重要公式.

在某些特殊情形下,针对矩阵$A(x)$的特点,可以求出(1.2)的一个基解矩阵的有限形式.

【例 3】 试求微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1/x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\tag{1.23}$$

的一个基解矩阵,并求出它的通解.上式中自变量x的取值区间不含$x=0$.

解 写出(1.23)的两个分量式为

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_1+y_2,\\[2mm]\dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{1}{x}y_2.\end{cases}$$

从后一式容易求出y_2的通解为

$$y_2=kx,$$

其中k为任意常数.可分别取$y_2=0$和$y_2=x$,代入前一式得到两个相应的特解$y_1=e^x$和$y_1=-(x+1)$.这样就求得(1.23)的一个解矩阵为

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^x&-(x+1)\\0&x\end{pmatrix}.$$

显然，当 $x \neq 0$ 时，$\det\Phi(x) = xe^x \neq 0$. 因此，$\Phi(x)$ 是方程(1.23)的一个基解矩阵. 根据定理 1，(1.23) 的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -x-1 \\ x \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

注意，这里基解矩阵的朗斯基行列式在 $x=0$ 的值为 $\det\Phi(0) = 0$. 这是否与定理 2 的结论不相容？

习 题 6-1

1. 求出齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

的通解，其中 $A(t)$ 分别为：

(1) $A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$， $t \neq 0$；

(2) $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$；

(4) $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 求解非齐次线性微分方程组的初值问题：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2}{t}x, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2}{t}x, \quad (t > 0) \\ x(1) = \dfrac{1}{3}, \quad y(1) = -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{1+t^2}x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{t}y + x + t, \quad (t > 0) \\ x(1) = 0, \quad y(1) = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

3. 试证向量函数组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}$$

在任意区间 $a<x<b$ 上线性无关.（显然，它们的朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$. 对照定理 2 可知，上述三个线性无关的向量函数不可能同时满足任何一个三阶的齐次线性微分方程组.）

4. 试证基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组，即如果方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y \quad 与 \quad \frac{dy}{dx}=B(x)y$$

有一个相同的基解矩阵，则 $A(x)\equiv B(x)$.

5. 设 $\Phi(x)$ 是线性齐次微分方程组(1.2)的一个基解矩阵，并且 n 维向量函数 $f(x,y)$ 在区域：$a<x<b$，$|y|<\infty$ 上连续. 试证：求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=A(x)y+f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

等价于求解积分方程

$$y(x)=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds,$$

其中 $x_0\in(a,b)$.

6. 设非齐次线性微分方程组(1.1)中的 $f(x)\not\equiv 0$，当 $a<x<b$. 则(1.1)有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

§2. 常系数线性微分方程组

我们已在上一节指出，常数变易公式(1.21)和(1.22)并没有完全解决微分方程组(1.1)的求解问题. 本节把讨论的范围缩小到常系数的情形，则求解问题将获得彻底解决.

所谓**常系数线性微分方程组**，指的是线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=Ay+f(x) \tag{2.1}$$

中的系数矩阵 A 为 n 阶**常数矩阵**，而 $f(x)$ 是在 $a<x<b$ 上连续的向量函数. 我们已经知道，求解线性微分方程组(2.1)的关键是求

出相应齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{2.2}$$

的一个基解矩阵. 当 $n = 1$ 时,矩阵 A 就是一个实数 a,这时方程(2.2)成为

$$\frac{dy}{dx} = ay, \tag{2.3}$$

它的通解为

$$y = Ce^{ax},$$

其中 C 为任意常数. 换句话说,e^{ax} 是方程(2.3)的一个基解矩阵. 一个自然的设想是,常系数线性微分方程组(2.2)有一个基解矩阵为 e^{xA}. 这里,我们必须首先弄清把一个矩阵放在指数的位置上是什么意思.

2.1 矩阵指数函数的定义和性质

令 $\mathscr{M}$ 表示由一切 n 阶(实常数)矩阵组成的集合. 在线性代数中,我们知道 $\mathscr{M}$ 是一个 n^2 维的线性空间.

对 $\mathscr{M}$ 中的任何元素

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n},$$

定义它的模为

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

则我们容易证明:

1) $\|A\| \geqslant 0$; 而且 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$(零矩阵).

2) 对于任意 $A, B \in \mathscr{M}$,有不等式

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

现在,我们在 $\mathscr{M}$ 中有了这个模 $\|\cdot\|$,就可以仿照实数域中的数学分析来定义矩阵序列,柯西矩阵序列和矩阵无穷级数及其收敛性的概念. 而且容易证明,在 $\mathscr{M}$ 中任何柯西序列都是收敛的,

即线性空间 $\mathscr{M}$ 关于模 $\|\cdot\|$ 是完备的.

另外,在 $\mathscr{M}$ 中还特别有乘法运算,即对于任意 $A, B \in \mathscr{M}$,有 $AB \in \mathscr{M}$. 而且

3) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

利用上述性质,我们有

$$\|A^k\| \leqslant \|A\|^k, \quad (k \geqslant 1).$$

通常令 A^0 为 n 阶单位矩阵 E. 注意,上述不等式对 $k = 0$ 不成立. 由此不难证明下述

命题 1 矩阵 A 的幂级数

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$

是绝对收敛的. ▌

现以记号 e^A(或 $\exp A$) 表示上述矩阵幂级数的和,并称它为**矩阵 A 的指数函数**,即

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

注意, $e^A \in \mathscr{M}$. 另外,当 A 是 1 阶矩阵(即实数) 时, e^A 就是通常的指数函数.

现在,我们考察一般矩阵指数函数的性质.

命题 2 矩阵指数函数有下面的性质:

1) 若矩阵 A 和 B 是可交换的(即 $AB = BA$),则

$$e^{A+B} = e^A e^B;$$

2) 对任何矩阵 A,指数函数 e^A 是可逆的,且

$$(e^A)^{-1} = e^{-A};$$

3) 若 P 是一个非奇异的 n 阶矩阵,则

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}.$$

证明 留给读者. ▌

2.2 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

现在，我们可以利用矩阵指数函数求得常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵，从而得到它的通解.

定理 4 矩阵指数函数 $\Phi(x)=e^{xA}$是常系数齐次线性微分方程组(2.2)的一个**标准基解矩阵**，即$\Phi(x)$是基解矩阵且$\Phi(0)=E$.

证明 在自变量x的任意有限区间上，易知矩阵指数函数

$$e^{xA}=E+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{x^k}{k!}A^k+\cdots$$

是一致收敛的，而且可以利用逐项微分法则，得到

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(x)}{dx}&=\frac{d}{dx}e^{xA}=A+xA^2+\frac{x^2}{2!}A^3+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\cdots\\&=A\left(E+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}+\cdots\right)\\&=Ae^{xA}=A\Phi(x).\end{aligned}$$

这说明$\Phi(x)$是(2.2)的一个解矩阵.

另一方面，由于$\Phi(0)=E$，所以$\det\Phi(0)=1$. 这就证明了$\Phi(x)$是(2.2)的一个基解矩阵，且是标准的. ▌

把定理4应用到定理3，并注意到命题2中的结论1)和2)，则立即可得

推论 3 常系数非齐次线性微分方程组(2.1)在区间(a,b)上的通解为

$$\mathbf{y}=e^{xA}\mathbf{C}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)ds, \tag{2.4}$$

其中$\mathbf{C}$为一任意的常数列向量；而(2.1)满足初值条件$\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$的解为

$$\mathbf{y}=e^{(x-x_0)A}\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)ds, \tag{2.5}$$

其中$x_0\in(a,b)$. ▌

现在，我们要进一步解决的问题是，这种用矩阵无穷级数定义

的指数函数 e^{xA}，是否可以用初等函数的有限形式表达出来. 如果可能的话，应该怎样计算它呢？让我们先看下面的两个例子.

【例 1】 假设

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$$

为一个对角矩阵，则不难推出

$$e^{xA}=E+x\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix}a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}e^{a_1x} & & & \\ & e^{a_2x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nx}\end{pmatrix}. \quad ▌$$

【例 2】 假设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

试求 e^{xA}.

解 容易看出，矩阵 A 可以分解成两个矩阵之和

$$A=E+Z,$$

其中 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 为**单位矩阵**，而 $Z=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 为**幂零矩阵**(即它的某一方幂为零矩阵). 由于单位矩阵与任一矩阵是可交换的，则由命题 2 的 1) 可知

$$e^{xA}=e^{x(E+Z)}=e^{xE}\,e^{xZ}. \tag{2.6}$$

另一方面，利用例 1 的结果，对于单位矩阵 E，我们有

$$e^{xE}=\begin{pmatrix}e^x & 0\\ 0 & e^x\end{pmatrix}=e^xE. \tag{2.7}$$

再利用幂零矩阵的性质可得

$$\begin{aligned}e^{xZ}&=E+x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\cdots\\ &=E+x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

由此看出，幂零矩阵的指数函数展开式实际上是一个有限和. 这是我们解决问题的关键所在.

这样，只要把结果(2.7) 和(2.8) 代入(2.6)，最后就得到

$$e^{xA}=e^x\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ 0 & e^x\end{pmatrix},$$

它已是初等函数的有限形式. ▌

我们对例 2 进行如此细致的分析，是因为它的方法有普遍意义. 大家知道，任一矩阵 A 在相似变换下都可以化成它的约当(Jordan) 标准型 J，而 J 的每一约当块又都可分解成矩阵 λE 和一个幂零矩阵之和. 因此，e^{xJ}可以表成初等函数有限和的形式. 另一方面，e^{xA}和 e^{xJ}之间可以由命题 2 中的结论 3) 建立联系. 下面我们就对刚才的说法进行详细的论证.

2.3　利用约当标准型求基解矩阵

根据一般线性代数教科书的结果，对于每一个 n 阶矩阵 A，存在 n 阶非奇异矩阵 P，使得

$$A=PJP^{-1},$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m\end{pmatrix}$$

为约当标准型. 假设约当块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

是 n_i 阶的 ($i=1,2,\cdots,m$; $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$), 则 J_i 有如下分解式:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中右侧第一个矩阵具有 $\lambda_i E$ 的形式, 而第二个矩阵是幂零的(它的 n_i 次幂为零矩阵). 由于矩阵 $\lambda_i E$ 与任何矩阵都可交换, 因此用例 2 的方法容易得出

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_i x}E\left\{ E + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\left. + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

由此得到它的初等函数有限和的形式，即

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

$(i=1,2,\cdots,m)$. 再用例 1 的方法容易得到

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}.$$

另一方面，由命题 2 中的结论 3) 可知

$$e^{xA} = e^{PxJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1}. \qquad (2.10)$$

公式(2.10) 提供了实际计算方程(2.2) 的基解矩阵 e^{xA}的一个方法. 另外，利用P的可逆性和在 §1 中的推论 2，我们知道 $e^{xA}P$ 也是(2.2) 的一个基解矩阵，而且由(2.10) 得到

$$e^{xA}P = Pe^{xJ}, \qquad (2.11)$$

亦即

$$e^{xA}P = P\begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}, \qquad (2.12)$$

其中 $e^{xJ_i}(i=1,2,\cdots,m)$ 由(2.9) 给出.

从(2.11) 或(2.12) 来求(2.2) 的基解矩阵，与(2.10) 相比，可以避免求逆矩阵并减少一次矩阵乘法的运算. 尽管如此，求约当

标准型 J 及过渡矩阵 P 的计算量一般仍然很大，所以有必要寻找比较简便的替代方法. 现讨论如下.

2.4 待定指数函数法

现在，我们可把上面的理论分析所得到的形式(2.12)应用于待定系数法，直接求得方程(2.2)的相应基解矩阵. 首先，由于矩阵 A 的约当标准型依赖于它的特征根的重数，我们将区分两种不同的情形：

(一) A 只有单的特征根

设 A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为单根，因此它们互不相同. 则 A 的约当标准型 J 就是一个对角矩阵，由(2.11)和例1得到相应的基解矩阵

$$\Phi(x) = e^{xA}P = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & \\ & e^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix},$$

注意，$\Phi(0) = P$. 由此可见

$$e^{xA} = \Phi(x)\Phi^{-1}(0). \tag{2.13}$$

因此，问题归于如何确定矩阵 P. 令 $\mathbf{r}_i$ 表示 P 的第 i 列的向量，则基解矩阵

$$\Phi(x) = \left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1, e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2, \cdots, e^{\lambda_n x}\mathbf{r}_n\right).$$

它告诉我们方程(2.2)有如下形式的解：

$$e^{\lambda_i x}\mathbf{r}_i,$$

其中 $\mathbf{r}_i$ 是一个待定的常数列向量. 下面的引理给出了一个求 $\mathbf{r}_i$ 的方法.

引理 6 微分方程(2.2)有非零解 $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{r}$，当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征根，且 $\mathbf{r}$ 是与 λ 相应的特征向量.

证明　用直接代入法推出：$y=e^{\lambda x}r$ 是微分方程(2.2)的解，当且仅当

$$\lambda e^{\lambda x}r = Ae^{\lambda x}r, \qquad \forall x \in (a,b).$$

它等价于求齐次线性(代数)方程组

$$\left(A-\lambda E\right)r = 0$$

的非零解 r，即与 A 的特征根 λ 相应的特征向量．▌

定理 5　设 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则矩阵函数

$$\Phi(x) = \left(e^{\lambda_1 x}r_1, \cdots, e^{\lambda_n x}r_n\right)$$

是(2.2)的一个基解矩阵，其中 r_i 是 A 的与 λ_i 相应的特征向量．

证明　由引理 6，$\Phi(x)$ 是方程(2.2)的解矩阵．另一方面，由线性代数的结果，对应于不同特征根的特征向量组是线性无关的，所以

$$\det\Phi(0) = \det\left(r_1, \cdots, r_n\right) \neq 0.$$

再由定理 2 可知，$\Phi(x)$ 是微分方程(2.2)的一个基解矩阵．▌

【附注 1】　利用引理 6 的结果和定理 5 的证明方法容易看出，定理 5 的结果可以得到加强，即我们有

定理 5*　设 $r_1, \cdots, r_n$ 是矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量，则矩阵函数

$$\Phi(x) = \left(e^{\lambda_1 x}r_1, \cdots, e^{\lambda_n x}r_n\right)$$

是方程组(2.2)的一个基解矩阵，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的与 $r_1, \cdots, r_n$ 相应的特征根，它们不必互不相同．▌

虽然定理 5* 的结果强于定理 5，但它的应用却不如定理 5 那样爽快．问题在于：当矩阵 A 有重的特征根时，我们并不知道 A 是否仍有 n 个线性无关的特征向量．在很多情况下，这是一个复杂的

问题.

【附注 2】 虽然 A 是实矩阵，但它可能有(共轭的)复特征根，从而定理 5 中的矩阵 $\Phi(x)$ 可能是复的. 但是，容易看出，当 A 为实矩阵时，矩阵 e^{xA} 是实的. 因此，我们可以利用公式(2.13)，从复矩阵 $\Phi(x)$ 得到所需的实基解矩阵 e^{xA}.

不过，由于在公式(2.13)中需要计算逆矩阵 $\Phi^{-1}(0)$，这在应用上并不是太方便的(特别当 n 较大时). 下面再介绍一个从复值解求实值解的方法.

设微分方程(2.2)有一个复值解

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x).$$

则利用在方程(2.2)两侧取共轭的方法(并注意到矩阵 A 是实的)易知，$\boldsymbol{y}_1$ 的共轭

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{u}(x) - i\boldsymbol{v}(x)$$

也是(2.2)的一个复值解. 从而它们的实部

$$\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$$

和虚部

$$\boldsymbol{v}(x) = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$$

都是方程(2.2)的实值解. 这样，我们从一对共轭的复值解可以得到两个实值解. 而且不难看出，用这种方法可把解矩阵 $\Phi(x)$ 中的所有复值解都换成实值解，最后得到 n 个线性无关的实值解.

【例 3】 求微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

的通解.

解 容易算出

$$\det(A - \lambda E) = 3\lambda(1 - \lambda^2).$$

因此,矩阵 A 有特征根 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ 和 $\lambda_3=-1$. 通过简单的计算可知,与它们相应的特征向量可以取为

$$r_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此,所求的通解为

$$y=C_1\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}e^{x}+C_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 为任意常数. ▌

【例 4】　求解微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}y. \tag{2.14}$$

解　易知

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\lambda^2-2\lambda+2.$$

因此矩阵 A 有特征根 $\lambda_1=1+i$ 和 $\lambda_2=1-i$, 而且相应的特征向量可分别取为

$$r_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

所以解矩阵可取为

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^{(1+i)x}&ie^{(1-i)x}\\ie^{(1+i)x}&e^{(1-i)x}\end{pmatrix}=e^{x}\begin{pmatrix}e^{ix}&ie^{-ix}\\ie^{ix}&e^{-ix}\end{pmatrix}.$$

这是一个复值矩阵. 代入(2.13)式,可得实的基解矩阵

$$\begin{aligned}e^{xA}&=\Phi(x)\Phi^{-1}(0)\\&=e^{x}\begin{pmatrix}e^{ix}&ie^{-ix}\\ie^{ix}&e^{-ix}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}\\&=e^{x}\begin{pmatrix}\cos x&\sin x\\-\sin x&\cos x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可以得到(2.14)的通解

$$y = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

现在,我们顺便利用本节附注 2 的方法,从复值解提取所需的实值解. 从上面的 $\Phi(x)$ 可以看出,它的第一列

$$\mathbf{y}_1 = e^x \begin{pmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

是一个复值解. 因此,它的实部和虚部

$$\mathbf{u} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

是二个线性无关解,由此同样得到通解(2.15). 注意,$\mathbf{y}_1$ 的共轭

$$\mathbf{y}_2 = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} - ie^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

虽没在 $\Phi(x)$ 中出现,但它与 $\Phi(x)$ 的第二列只差一个因子 i. ▌

(二) **A 有重的特征根.**

假设矩阵 A 的互不相同的特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 而相应的重数分别为正整数 $n_1, \cdots, n_s$, $(n_1 + \cdots + n_s = n)$. 在 A 的约当标准型 J 中,与 λ_i 相对应的约当块可能不止一个,但这些约当块的阶数之和为 n_i, $(i = 1, \cdots, s)$. 从(2.12)式可以推出,在(2.2)的基解矩阵 $e^{xA}P$ 的所有列向量中,与 λ_i 相关的 n_i 列都具有下列形式

$$\mathbf{y} = e^{\lambda_i x}\left(\mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!}\mathbf{r}_1 + \frac{x^2}{2!}\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{x^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!}\mathbf{r}_{n_i - 1} \right), \tag{2.16}$$

其中 $\mathbf{r}_j (j = 0, 1, \cdots, n_i - 1)$ 是 n 维常数列向量. 下面的引理给出确定诸 $\mathbf{r}_j$ 的方法.

引理 7 设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征根,则(2.2)有形如(2.16)的非零解的充要条件是: $\mathbf{r}_0$ 是齐次线性代数方程组

$$\left(A - \lambda_i E \right)^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

的一个非零解，而且(2.16)式中的 $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_i-1}$是由下面的关系式逐次确定的：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \left(A - \lambda_i E\right) \boldsymbol{r}_0, \\ \boldsymbol{r}_2 = \left(A - \lambda_i E\right) \boldsymbol{r}_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{r}_{n_i-1} = \left(A - \lambda_i E\right) \boldsymbol{r}_{n_i-2}. \end{cases} \tag{2.18}$$

证明　假设微分方程组(2.2)有形如(2.16)的非零解，则把(2.16)代入(2.2)后得到

$$\begin{aligned} &\lambda_i e^{\lambda_i x}\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}\right) \\ &+ e^{\lambda_i x}\left(\boldsymbol{r}_1 + \frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_2 + \cdots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}\right) \\ &= Ae^{\lambda_i x}\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}\right), \end{aligned}$$

消去 $e^{\lambda_i x}$，即得

$$\begin{aligned} &\left(A - \lambda_i E\right)\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}\right) \\ &= \boldsymbol{r}_1 + \frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_2 + \cdots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}. \end{aligned}$$

比较 x 的同次幂系数可得

$$\begin{cases} \left(A - \lambda_i E\right)\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1, \\ \left(A - \lambda_i E\right)\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(A - \lambda_i E\right)\boldsymbol{r}_{n_i-2} = \boldsymbol{r}_{n_i-1}, \\ \left(A - \lambda_i E\right)\boldsymbol{r}_{n_i-1} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} (A-\lambda_i E)\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_1, \\ (A-\lambda_i E)^2\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A-\lambda_i E)^{n_i-1}\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_{n_i-1}, \\ (A-\lambda_i E)^{n_i}\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}. \end{cases}$$

因此，$\boldsymbol{r}_0$ 是(2.17)的非零解(否则，(2.16)是(2.2)的零解)，而 $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_i-1}$ 满足(2.18). 注意，在 $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_i-1}$ 中只有前 m 个是非零向量，以后的全是零向量，其中 m 可能是 1,2, 等等，但最多是 n_i.

以上的推理过程可以全部倒推回去. 从而引理得证. ▌

现在，我们需要线性代数中的如下结果，它的证明可见一般的代数教程.

命题 4 设矩阵 A 的互不相同的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别是 $n_1, n_2, \cdots, n_s$, $(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$；记 n 维常数列向量所组成的线性空间为 V，则

1) V 的子集合

$$V_i=\left\{\boldsymbol{r}\in V \,\middle|\, (A-\lambda_i E)^{n_i}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}\right\}$$

是矩阵 A 的 $n_i(i=1,2,\cdots,s)$ 维不变子空间. 并且

2) V 有直和分解

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s. \quad ▌$$

下面的定理是本节的主要结果.

定理 6 设 n 阶实值常数矩阵 A 在复域中互不相同的特征根是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，相应的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$, $(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$. 则常系数齐次线性微分方程组(2.2)，即

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

有基解矩阵 $\Phi(x)$ 为

$$\left[e^{\lambda_1 x} P_1^{(1)}(x), \cdots, e^{\lambda_1 x} P_{n_1}^{(1)}(x); \cdots\cdots; e^{\lambda_s x} P_1^{(s)}(x), \cdots, e^{\lambda_s x} P_{n_s}^{(s)}(x) \right], \tag{2.19}$$

其中

$$P_j^{(i)}(x) = r_{j0}^{(i)} + \frac{x}{1!} r_{j1}^{(i)} + \frac{x^2}{2!} r_{j2}^{(i)} + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{jn_i-1}^{(i)} \tag{2.20}$$

是与 λ_i 相应的第 j 个向量多项式($i = 1,2,\cdots,s$; $j = 1,2,\cdots,n_i$)，而 $r_{10}^{(i)}$, …, $r_{n_i0}^{(i)}$是齐次线性代数方程组(2.17)的 n_i 个线性无关解，且 $r_{jk}^{(i)}$($i = 1,2,\cdots,s$; $j = 1,2,\cdots,n_i$; $k = 1,2,\cdots,n_i-1$)是把 $r_{j0}^{(i)}$ 代替(2.18)中的 r_0而依次得出的 r_k.

此外，当所得出的 $\Phi(x)$ 是复值时，可利用本节附注 2 所述的方法从 $\Phi(x)$ 提取实值基解矩阵.

证明　由引理 7 可知，在(2.19)中矩阵 $\Phi(x)$ 的每一列都是(2.2)的解. 因此，我们只须证明 $\Phi(x)$ 的各列线性无关即可. 从(2.19)和(2.20)不难看出

$$\Phi(0) = \left[r_{10}^{(1)}, \cdots, r_{n_10}^{(1)}; \cdots\cdots; r_{10}^{(s)}, \cdots, r_{n_s0}^{(s)} \right]. \tag{2.21}$$

由命题 4 的 1) 可知，我们可以适当选取 $\{r_{j0}^{(i)}\}$，使得相应于同一个 λ_i 的 $r_{10}^{(i)}, \cdots, r_{n_i0}^{(i)}$是线性无关的；再由命题 4 的 2) 可见，矩阵 $\Phi(0)$ 中的各列构成了 n 维线性空间 V 的一组基，从而 $\det\Phi(0) \neq 0$. 因此，$\Phi(x)$ 是微分方程(2.2)的一个基解矩阵(见定理 2). ▌

【例 5】　求解方程组

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} y.$$

解 由于

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -4 & -1-\lambda & 0\\ 4 & -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

所以 A 有单重特征根 $\lambda_1=-2$ 和二重特征根 $\lambda_2=1$.

对于 $\lambda_1=-2$,可以算出

$$\left(A-\lambda_1E\right)=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 4 & -8 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(上面的符号 → 表示对矩阵施行初等行变换的过程),因此与 λ_1 相应的特征向量可取为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对于二重特征根 $\lambda_2=1$,可以算出

$$\left(A-\lambda_2E\right)^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 28 & 44 & 9\end{pmatrix},$$

因此,方程 $\left(A-\lambda_2E\right)^2r=0$ 有二个线性无关的解为:

$$r_{10}=\begin{pmatrix}11\\-7\\0\end{pmatrix},\quad 和 \quad r_{20}=\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}.$$

把它们分别代入(2.18),并注意 $n_i=2$,就可得到

$$r_{11}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\-7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-30\\100\end{pmatrix}$$

和

$$r_{21}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&-8&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

把以上结果代入(2.19)式,可得到一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}0&(11+15x)e^{x}&3e^{x}\\0&(-7-30x)e^{x}&-6e^{x}\\e^{-2x}&100xe^{x}&20e^{x}\end{pmatrix}.$$

因此,所求的通解为

$$\boldsymbol{y}=\Phi(x)\mathbf{C},$$

其中 C 为任意常数列向量. 这个通解也可以改写成下面更清晰的形式

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-2x}+C_2\begin{pmatrix}11+15x\\-7-30x\\100x\end{pmatrix}e^{x}+C_3\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}e^{x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数. ▌

【例 6】 求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\begin{pmatrix}-5&-10&-20\\5&5&10\\2&4&9\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

解 由于

$$\det\left(A-\lambda E\right)=-(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5),$$

所以 A 有单重特征根 5 和单重共轭复特征根 $2+i$ 与 $2-i$. 求出与这三个特征根相应的特征向量,并把它们分别作为列向量,就可得到一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}-2e^{5x}&(3+i)e^{(2+i)x}&(3-i)e^{(2-i)x}\\0&(2-i)e^{(2+i)x}&(2+i)e^{(2-i)x}\\e^{5x}&-2e^{(2+i)x}&-2e^{(2-i)x}\end{pmatrix}.$$

采用本节附注 2 的方法,从 $\Phi(x)$ 的第二(或第三)列提取实部与虚

部，再与第一列合在一起，就得到一个实基解矩阵

$$\tilde{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}-2e^{5x} & (3\cos x-\sin x)e^{2x} & (\cos x+3\sin x)e^{2x}\\ 0 & (2\cos x+\sin x)e^{2x} & (-\cos x+2\sin x)e^{2x}\\ e^{5x} & -2\cos xe^{2x} & -2\sin xe^{2x}\end{pmatrix}.$$

（也可以直接验证，

$$\det\tilde{\Phi}(0)=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

不等于零.）所以，所求的通解为

$$\boldsymbol{y}=\tilde{\Phi}(x)\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为三维的任意常数列向量. ▌

【例 7】 求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}. \tag{2.22}$$

解 容易看出，上面的矩阵 A 有单重特征根 -1 和二重特征根 2，因此可用例 5 的方法求解. 但是，我们可以充分利用矩阵 A 的特点，采用较简捷的方法. 例如，注意到(2.22)的第三个(分量)方程是

$$\frac{dy_3}{dx}=2y_3,$$

因而很容易求得

$$y_3=C_1e^{2x},$$

把它代入到第二个方程，得到

$$\frac{dy_2}{dx}=-y_2+C_1e^{2x},$$

这是关于 y_2 的一阶线性方程，可求出它的解

$$y_2=C_2e^{-x}+\frac{1}{3}C_1e^{2x}.$$

最后，再把 y_2 的表达式代入第一个方程，得到

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}C_1 e^{2x},$$

同样可求得它的解

$$y_1 = C_3 e^{2x} - \frac{2}{3}C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}C_1 x e^{2x}.$$

这样，方程组(2.22)的通解为

$$\boldsymbol{y} = C_1\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}e^{2x} + C_2\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^{-x} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数. ▌

习　题　6-2

1. 求出常系数齐次线性微分方程组(2.2)的通解，其中的矩阵 A 分别为：

(1) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 求出常系数非齐次线性微分方程组(2.1)的通解，其中：

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}$;

(4) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $f(x)=\begin{bmatrix} 2-x \\ 0 \\ 1-x \end{bmatrix}$;

(5) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $f(x)=\begin{bmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{bmatrix}$.

3. 求出微分方程组(2.1)满足初值条件 $y(0)=\eta$ 的解，其中：

(1) $A=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}$, $\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} 3x \\ 4 \end{pmatrix}$, $\eta=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix}$, $\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(4) $A=\begin{bmatrix} 16 & 14 & 38 \\ -9 & -7 & -18 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$, $f(x)=\begin{bmatrix} -2e^{-x} \\ -3e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{bmatrix}$, $\eta=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. 求解微分方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中 a 和 b 为实常数，而且 $b\neq 0$.

5. 证明：常系数齐次线性微分方程组(2.2)的任何解当 $x\to\infty$ 时都趋于零，当且仅当它的系数矩阵 A 的所有特征根都具有负的实部.

§3.　高阶线性微分方程

本节讨论仅含一个未知函数 $y=y(x)$ 的 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),\tag{3.1}$$

其中 $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ 和 $f(x)$ 都是区间 $a<x<b$ 上的连续函数. 当 $f(x)\not\equiv 0$ 时,称(3.1)为**非齐次线性微分方程**. 与(3.1)相应的**齐次线性微分方程**是

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.\tag{3.2}$$

如上一章 §2 所指出的,如果引进新的未知函数

$$y_1=y,\ y_2=y',\ \cdots,\ y_n=y^{(n-1)},\tag{3.3}$$

则方程(3.1)等价于下面的线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x),\tag{3.4}$$

其中

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\f(x)\end{pmatrix}$$

和

$$A(x)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&-a_{n-2}(x)&\cdots&-a_1(x)\end{pmatrix};$$

而齐次线性微分方程(3.2)也相应地转换成

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \tag{3.5}$$

这样一来，本章前两节的结果都可以应用到方程组(3.5)和(3.4)上来. 而且，利用这时 $A(x)$ 和 $f(x)$ 的特殊形式，我们能够获得某些进一步的结果. 然后，在有关的向量公式中，只要取第一个分量，就可得到方程式(3.2)和(3.1)的相应结果. 特别，微分方程(3.1)满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

的解在区间 $a < x < b$ 上存在而且唯一.

3.1 高阶线性微分方程的一般理论

假设(纯量)函数组

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x) \tag{3.6}$$

分别是齐次线性微分方程(3.2)的 n 个解，则由(3.3)式可得到方程组(3.5)的 n 个相应的解为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

它们的朗斯基行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

注意，在上面的行列式中，从第二行开始的各行都是由第一行元素逐次求导而得. 因此，它事实上是由第一行元素所决定的. 所以，我们也把(3.8)称为(纯量)函数组(3.6)的朗斯基行列式.

同样道理，利用关系式(3.3)容易得出下面的命题.

命题 5 方程(3.2)的解组(3.6)在 $a<x<b$ 上是线性无关(相关)的，当且仅当由它们作出的向量函数组(3.7)(它是方程组(3.5)的解组)在 $a<x<b$ 上是线性无关(相关)的. ▌

现在，我们可以把§1对齐次线性微分方程组得到的两个定理自然地转述到高阶方程式的情形.

定理 1* 齐次线性微分方程(3.2)在区间 $a<x<b$ 上存在 n 个线性无关的解. 如果这 n 个线性无关的解如(3.6)所示，则方程(3.2)的通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x),$$

其中 $C_1,\cdots,C_n$ 为任意常数. ▌

定理 2* 方程(3.2)的解组(3.6)是线性无关的充要条件为它的朗斯基行列式(3.8)在区间 $a<x<b$ 上恒不为零(而且这等价于 $W(x)$ 在这区间内的某一点的值不等于零). ▌

和方程组的情形一样，我们把齐次线性微分方程(3.2)的 n 个线性无关的解称为一个**基本解组**. 定理 1* 肯定了基本解组的存在性，而定理 2* 告诉我们怎样判断一个解组是否为基本解组.

【附注 1】 借助于微分方程(3.5)中矩阵 $A(x)$ 的特点，即 $\operatorname{tr}A(x)=-a_1(x)$，在§1中的刘维尔公式(1.9)现在就取较简单的形式：

$$W(x)=W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)ds},\quad (a<x<b)\tag{3.9}$$

其中 $W(x)$ 是方程(3.2)的解组(3.6)的朗斯基行列式(3.8)，而 $x_0\in(a,b)$. 值得注意的是当 $n=2$ 时，从方程(3.2)的一个非零解可以利用(3.9)而导出它的通解. 请看下面的例子.

【例 1】 设 $y=\varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\tag{3.10}$$

的一个非零解，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $a<x<b$ 上的连续函数，则方程(3.10)的通解为

$$y=\varphi(x)\left[C_1+C_2\int\frac{1}{\varphi^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx\right],\qquad(3.11)$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证明 为简单起见,我们设 $y=\varphi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上恒不为零(一般情形见本节习题 4). 设 $y=y(x)$ 是方程(3.11)的任一解,则由刘维尔公式(3.9)得出

$$\begin{vmatrix}\varphi & y\\ \varphi' & y'\end{vmatrix}=Ce^{-\int p(x)dx}$$

(其中常数 $C\neq 0$), 亦即

$$\varphi y'-\varphi' y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

以积分因子 $\frac{1}{\varphi^2}$ 乘上式两端,就可推出

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\varphi}\right)=\frac{C}{\varphi^2}e^{-\int p(x)dx},$$

积分上式,就可得出(3.11). ▌

现在,我们把 §1 中非齐次线性微分方程组的常数变易公式应用到方程(3.1)上来,得出下面的结果.

定理 3* 设 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是齐次线性微分方程(3.2)在区间 $a<x<b$ 上的一个基本解组,则非齐次线性微分方程(3.1)的通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\varphi^*(x),\qquad(3.12)$$

其中 $C_1,\cdots,C_n$ 是任意常数,而

$$\varphi^*(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)ds\qquad(3.13)$$

是方程(3.1)的一个特解. 这里 $W(x)$ 是 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 的朗斯基行列式(3.8),而 $W_k(x)$ 是 $W(x)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式(换句话说,是用 $(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)^T$ 替换 $W(x)$ 的第 k 列后所得到的行列式).

证明 对于与(3.1)和(3.2)分别等价的微分方程组(3.4)和(3.5)应用定理 3,得到公式(1.21),其中基解矩阵 $\Phi(x)$ 是由向

量函数组(3.7)作为列向量所组成的. 然后,取(1.21)的第一个分量,就得出(3.12)式. 余下来,只需要证明(1.21)中的向量函数

$$\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

的第一个分量就是由(3.13)给出的函数 $\varphi^*(x)$. 事实上,利用方程组(3.4)中 $f(x)$ 的特殊性,我们有

$$\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(x)}{W(s)}\begin{pmatrix} * & \cdots & * & W_1(s) \\ * & \cdots & * & W_2(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & * & W_n(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(s)\end{pmatrix}ds$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)}{W(s)}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \cdots & \varphi_n(x) \\ * & \cdots & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_1(s)\\ \vdots\\ \vdots\\ W_n(s)\end{pmatrix}ds.$$

显然,上式中的第一个分量就是由(3.13)给出的函数 $\varphi^*(x)$. (我们在上面笼统地用 * 表示无需写出的元素.) ▌

【例 2】 若已知二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{3.14}$$

的相应齐次方程的二个线性无关的特解 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$,试求它的通解. 这里 $p(x)$, $q(x)$ 和 $f(x)$ 都是区间 $a<x<b$ 上的连续函数.

解 直接用公式(3.12)和(3.13),就可得到方程(3.14)在区间 $a<x<b$ 上的通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s)-\varphi_2(s)\varphi_1'(s)}f(s)ds, \tag{3.15}$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

为了使读者加深对高阶线性方程的常数变易法的了解，我们用它来重新推导(3.15)式.

我们知道，与(3.14)相应的齐次方程的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

其中C_1和C_2为任意常数. 现在假定非齐次方程(3.14)也有如上形式的解，但其中C_1和C_2变易为x的函数，即

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x). \tag{3.16}$$

求导一次，得到

$$y' = C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x) + C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x).$$

在上式中令

$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \tag{3.17}$$

(与(1.19)式相对照，并注意$f(x)$前$n-1$个分量都为零，可以看出上面的假定是合理的.) 则有

$$y' = C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x). \tag{3.18}$$

再求导一次，然后把所得结果联同(3.16)和(3.18)代入微分方程(3.14)，可以推出

$$C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x). \tag{3.19}$$

把(3.17)和(3.19)联立，可以解出

$$C_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

积分上式，再把得到的$C_1(x)$和$C_2(x)$代回到(3.16)式中，整理后就得到(3.15)式. ∎

3.2 常系数高阶线性微分方程

现在讨论n阶线性常系数微分方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{3.20}$$

和相应的齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{3.21}$$

其中$a_1, \cdots, a_n$是实常数，而$f(x)$是区间$a < x < b$上的实值连

续函数.

我们已经知道，整个讨论的关键是设法求出齐次线性微分方程(3.21)的一个基本解组. 为此，先把(3.21)转化为齐次线性微分方程组，然后应用上一节的结果，并在向量式中取第一个分量，就可得出(3.21)的相应结果.

利用变换(3.3)引进与 y 相关的未知函数 $y_1, \cdots, y_n$，则方程(3.21)等价于常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}, \tag{3.22}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

注意矩阵 A 的特征行列式为

$$\det\left(\lambda E - A\right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}, \tag{3.24}$$

因此，矩阵 A 的特征方程为

$$\det\left(\lambda E - A\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{3.25}$$

这恰是把微分方程(3.21)中的 $y^{(k)}$ 都换成 λ^k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 所得出的代数方程. 所以，方程(3.25)也叫作微分方程(3.21)的特

征方程.

定理 6* 设常系数齐次线性微分方程(3.21)的特征方程(3.25)在复数域中共有s个互不相同的根$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，而且相应的重数分别为$n_1, \cdots, n_s$, $(n_1+\cdots+n_s=n)$. 则函数组

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x};\cdots\cdots;\ e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x},\ \cdots,\ x^{n_s-1}e^{\lambda_s x} \tag{3.26}$$

是微分方程(3.21)的一个基本解组.

证明 我们只须找出方程组(3.22)的一个基解矩阵，使它的第一行元素恰为(3.26).

由于行列式(3.24)右上角的$n-1$阶子式取值1或-1，所以矩阵$(\lambda E-A)$的各$n-1$阶行列式的公因子是1，从而低于$n-1$的各阶行列式的公因子都是1. 因此，在A的约当标准型J中相应于特征根λ_k的约当块只有一个，从而它是n_k阶的，并有如下的标准形式

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix},$$

$(k=1,\cdots,s)$. 假设化A为约当标准型J的过渡矩为P，并且

$$AP=PJ=P\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

则我们可以断言，矩阵$P=(p_{ij})$的第一行元素满足下面的性质:

$$p_{1m_j}\neq 0,\quad (j=1,2,\cdots,s), \tag{3.28}$$

其中$m_1=1$, $m_2=n_1+1$, $\cdots$, $m_s=n_1+\cdots+n_{s-1}+1$. 事实上，若某个$p_{1m_j}=0$，则由矩阵A的特殊形式(3.23)及(3.27)式易知，P的第m_j列元素都等于零，这与过渡矩阵P的非奇异性相矛盾.

现在利用(2.12)和(2.9)式不难看出，方程组(3.22)的基解矩阵 $e^{xA}P$ 中的第一行元素依次是

$$p_{1m_1}e^{\lambda_1 x},\ *e^{\lambda_1 x}+p_{1m_1}xe^{\lambda_1 x},\cdots,\ *e^{\lambda_1 x}+\ *xe^{\lambda_1 x}+\cdots+\frac{p_{1m_1}x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}}{(n_1-1)!};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$p_{1m_s}e^{\lambda_s x},\ *e^{\lambda_s x}+p_{1m_s}xe^{\lambda_s x},\cdots,\ *e^{\lambda_s x}+\ *xe^{\lambda_s x}+\cdots+\frac{p_{1m_s}x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}}{(n_s-1)!},$$

其中 * 表示常值系数. 把上式与(3.26)相比较，容易看出：只要利用条件(3.28)和齐次线性微分方程解的叠加原理(§1的引理1)，就可以对矩阵 $e^{xA}P$ 进行适当的初等列变换，依次消去在第一行中含 * 的各项，从而得到方程(3.22)的另一个基解矩阵，而它恰以(3.26)为其第一行元素. ▌

【附注 2】 当特征方程(3.25)有复根时，它们必然成对共轭出现，而(3.26)中与之相应的复值函数也将成对共轭出现. 此时采用在§2中附注2所说的提取实部和虚部的方法，就可得到相应的实值解.

【例 3】 求解微分方程

$$y'''-y''-2y'=0.$$

解 利用(3.25)式可得特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)=0,$$

因此特征根为 0，−1 和 2，它们均为单根. 由定理 5*，方程的一个基本解组是

$$1,\quad e^{-x},\quad e^{2x}.$$

所以方程的通解是

$$y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.\quad ▌$$

【例 4】 求解微分方程

$$y^{(5)}-3y^{(4)}+6y'''-4y''+3y'-y=0.$$

解 特征方程为

$$\lambda^5-3\lambda^4+6\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0,$$

因此，$\lambda = 1$ 是三重特征根，而 $\lambda = \pm i$ 是一对共轭复根；我们得到一个基本解组

$$e^{x},\ xe^{x},\ x^{2}e^{x},\ e^{ix},\ e^{-ix}.$$

取复值解

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

的实部和虚部，就得到两个实值解 $\cos x$ 和 $\sin x$，它们与原有的三个实值解构成了一个实的基本解组. 所以，原方程的通解是

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x. \qquad \blacksquare$$

【例 5】 求解微分方程

$$y'' + \beta^2 y = f(x), \tag{3.29}$$

其中 $\beta > 0$ 是常数，而 $f(x)$ 是区间 $a < x < b$ 上的连续函数.

解 由于相应齐次线性微分方程的特征方程是

$$\lambda^2 + \beta^2 = 0,$$

不难按上例的方法求得齐次方程的一个基本解组

$$\varphi_1(x) = \cos\beta x, \quad \varphi_2(x) = \sin\beta x.$$

然后，利用常数变易公式(3.15)，在区间 $a < x < b$ 上得到所求的通解为

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(s)\sin\beta(x - s)ds, \ (3.15)$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数. $\blacksquare$

一般而言，我们可以先应用定理 6* 求出齐次线性微分方程(3.21)的一个基本解组，然后再应用公式(3.12)和(3.13)得到相应的非齐次线性微分方程(3.20)的通解. 但是，当 $f(x)$ 取某些特殊形式时，我们可以凭经验推知相应特解 $\varphi^*(x)$ 所具有的形式(它的理论依据见下节). 然后，根据这种预测的形式，再利用**待定系数法**来确定这样的特解.

例如，假设方程(3.20)中的非齐次项

$$f(x) = P_m(x)e^{\mu x},$$

其中 $P_m(x)$ 表示 x 的 m 次多项式，则(3.20)具有如下形式的特解

$$\varphi^*(x)=Q_m(x)e^{\mu x},$$

其中 m 次多项式 $Q_m(x)$ 的系数待定.当 μ 不是方程(3.21)的特征根时,把上述形式的特解 $\varphi^*(x)$ 代入相应的方程(3.20),就可确定 $Q_m(x)$ 的系数,从而最后得到所求的特解 $\varphi^*(x)$;当 μ 是 k 重特征根时,则须令

$$\varphi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x}.$$

又如,假设

$$f(x)=[A_m(x)\cos\beta x+B_l(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

其中 $A_m(x)$ 和 $B_l(x)$ 分别是 x 的 m 次和 l 次多项式,则相应特解的形式是

$$\varphi^*(x)=x^k[C_n(x)\cos\beta x+D_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

其中的非负整数 k 是 $\alpha\pm i\beta$ 作为方程(3.21)的特征根的重数(当 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根时取 $k=0$),$n=\max(m,l)$,而 n 次多项式 $C_n(x)$ 和 $D_n(x)$ 的系数待定.

【例6】 求解微分方程

$$y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5).$$

解 特征方程为

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0,$$

它有三重特征根 $\lambda=-1$.因此,设方程有特解

$$y^*=x^3(a+bx)e^{-x}=(ax^3+bx^4)e^{-x},$$

其中常数 a 和 b 待定.把它代入微分方程,得出

$$(6a+24bx)e^{-x}=(x-5)e^{-x},$$

由此推知

$$a=-\frac{5}{6}\quad 和\quad b=\frac{1}{24}.$$

所以,原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4)e^{-x}. \quad ▌$$

【例7】 求解微分方程

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

解 特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0,$$

它有二重特征根 $\lambda = -2$. 因此,设方程有特解

$$y^* = a\cos 2x + b\sin 2x,$$

其中常数 a 和 b 待定. 把它代入原方程,得出

$$8b\cos 2x - 8a\sin 2x = \cos 2x,$$

由此推知

$$a = 0 \quad 和 \quad b = \frac{1}{8}.$$

所以,原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x. \quad \blacksquare$$

在某些情形下,类似于代数方程组的消元法,我们可以把多个未知函数的线性微分方程组化为其中某一个未知函数的高阶微分方程来求解.

【例 8】 求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

解 从第一个方程可得

$$y = \frac{1}{5}\left(x - \frac{dx}{dt}\right), \tag{3.30}$$

把它代入第二个方程,就得到关于 x 的二阶方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0.$$

不难求出它的一个基本解组为

$$x_1 = \cos 3t, \quad x_2 = \sin 3t,$$

把 x_1 和 x_2 分别代入(3.30),得出 y 的两个相应的解为

$$y_1 = \frac{1}{5}(\cos 3t + 3\sin 3t), \quad y_2 = \frac{1}{5}(\sin 3t - 3\cos 3t).$$

由此得到原来微分方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数. ▌

习　题　6-3

1. 证明函数组

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, & 当\ x \geqslant 0 \\ 0, & 当\ x < 0 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 当\ x \geqslant 0 \\ x^2, & 当\ x < 0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty,\infty)$ 上线性无关,但它们的朗斯基行列式恒等于零.这与本节的定理 2* 是否矛盾?如果不矛盾它说明了什么?

2. 试证命题 5.

3. 考虑微分方程

$$y'' + q(x)y = 0.$$

(1)　设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是它的任意两个解,试证 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数.

(2)　设已知方程有一个特解为 $y=e^x$,试求这方程的通解,并确定 $q(x)=?$

4. 考虑微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.31}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 I: $a<x<b$ 上的连续函数.

(1)　设 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.31)在区间 I 上的一个非零解(即 $\varphi(x)$ 在区间 I 上不恒等于零),试证 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点(即:如果存在 $x_0\in I$,使得 $\varphi(x_0)=0$,那么必有 $\varphi'(x_0)\neq 0$).并由此进一步证明,$\varphi(x)$ 在任意有限闭区间上至多有有限个零点,从而每一个零点都是弧立的.

(2)　在例 1 中,对一般的情形证明相应的结论.

5. 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程(3.31)的一个基本解组,试证:

(1)　方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定.

(2)　$u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点.

6. 试用常数变易法证明定理 3*.

7. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数. 试把它化成常系数的齐次线性微分方程.

8. 求解有阻尼的弹簧振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

其中 m, r 和 k 都是正的常数. 并就 $\Delta = r^2 - 4mk$ 大于,等于和小于零的不同情况,说明相应解的物理意义.

9. 求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = p\cos\omega t,$$

其中 m, k, p 和 ω 都是正的常数. 并对外加频率 $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ 和 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 两种不同的情况,说明解的物理意义. 这里 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 是弹簧振子的固有频率.

10. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

(2) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x};$

(3) $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x;$

(4) $y''' + 3y' - 4y = 0;$

(5) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0;$

(6) $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0;$

(7) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0;$

(8) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0;$

(9) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 3, y'''(0) = 0;$

(10) $y^{(4)} + y = 2e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1;$

(11) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x;$

(12) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};$

(13) $x^2y'' + 5xy' + 13y = 0, \quad (x > 0);$

(14) $(2x + 1)^2y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = 0.$

*§4. 算子法和拉氏变换法简介

4.1 算子法

从上一节的讨论中我们已经知道，为了求解常系数线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (4.1)$$

我们只需先解相应的特征方程，再得出齐次方程的一个基本解组，然后由定理3* 得到(4.1)的通解，其中的特解 $\varphi^*(x)$ 是用常数变易公式计算的. 对于某些特殊形式的 $f(x)$(例如多项式，指数函数，三角函数，或它们乘积的组合)，我们期望有较简便的方法. 例如，在 §3 中后一部分的待定系数法. 本节将要介绍另一种更简捷的解法 —— 算子法. 请读者记住，我们本节的目的只是求出方程(4.1)的任何一个特解.

如果引入**算子**

$$D := \frac{d}{dx}, \quad D^2 := \frac{d^2}{dx^2}, \quad \cdots, \quad D^n := \frac{d^n}{dx^n},$$

以及与(4.1)相应的**算子多项式**

$$L(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n,$$

则(4.1)可以写成如下形式：

$$L(D)y = f(x). \qquad (4.2)$$

对于微分方程(4.2)，我们令记号 $\frac{1}{L(D)}f(x)$ 表示它的任一解，这样就有

$$L(D)\left[\frac{1}{L(D)}f(x)\right] \equiv f(x).$$

因此，在形式上可以把 $\frac{1}{L(D)}$ 看作是 $L(D)$ 的逆算子.

需要注意，给定微分方程(4.1)后，算子多项式 $L(D)$ 和函数

$f(x)$ 就都是确定的. 但函数 $\frac{1}{L(D)}f(x)$ 却不是唯一确定的. 事实上，它们可以相差到相应齐次方程 $L(D)y=0$ 的任何一个解. 由于我们的目的只是求出方程(4.2) 的任何一个特解，因此这里将不顾及这个差别，而按方便行事. 本节中的大部分等号都是在这个意义下成立的.

直接应用刚刚引进的概念，容易验证下面的两个公式.

公式 1 $\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)dx$,

....

$\frac{1}{D^k}f(x)=\int\cdots\int f(x)dx\cdots dx$, （取 k 次不定积分）.

公式 2 $\frac{1}{D-a}f(x)=e^{ax}\int e^{-ax}f(x)dx$,

（其中 a 为常数）.

由线性算子 $L(D)$ 的性质，不难得到 $\frac{1}{L(D)}$ 的两个性质：

性质 1 对于任意的常数 α 和 β，我们有

$$\frac{1}{L(D)}(\alpha u(x)+\beta v(x))=\alpha\frac{1}{L(D)}u(x)+\beta\frac{1}{L(D)}v(x).$$

性质 2 设 $L(D)=L_1(D)L_2(D)$，则

$$\frac{1}{L(D)}f(x)=\frac{1}{L_1(D)}\left[\frac{1}{L_2(D)}f(x)\right]$$
$$=\frac{1}{L_2(D)}\left[\frac{1}{L_1(D)}f(x)\right].$$

先通过一个简单的例子，看看如何应用上面的公式.

【例 1】 求微分方程

$$y''-y'=e^x+2x$$

的一个特解.

解 因为相应的微分算子 $L(D)=D^2-D=D(D-1)$，所以我们得到一个特解

$$y=\frac{1}{L(D)}(e^x+2x)=\frac{1}{D}\left[\frac{1}{D-1}(e^x+2x)\right]$$

$$=\frac{1}{D}\left(e^{x}\int e^{-x}(e^{x}+2x)dx\right)=\frac{1}{D}[xe^{x}-2(x+1)]$$

$$=(x-1)e^{x}-x(x+2).\quad \blacksquare$$

为了求解类型更广泛的微分方程，下面再介绍几个公式，并给出证明.

公式 3　设 γ 为常数，则

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\gamma x}f(x)]=e^{\gamma x}\frac{1}{L(D+\gamma)}f(x).$$

公式 4　设 $L(D)=(D-\gamma)^{s}L_1(D)$，　$L_1(\gamma)\neq 0$，　$s\geqslant 0$（即 γ 是 s 重的特征根），则

$$\frac{1}{L(D)}e^{\gamma x}=\frac{x^{s}}{s!L_1(\gamma)}e^{\gamma x}.$$

特别地，若 $s=0$（即 γ 不是特征根），则我们有

公式 4*　$$\frac{1}{L(D)}e^{\gamma x}=\frac{e^{\gamma x}}{L(\gamma)},\quad (L(\gamma)\neq 0).$$

公式 5　设 $L(D)=(D^2+\beta^2)^{s}L_1(D)$，$L_1(i\beta)\neq 0$，$s\geqslant 0$（即 $\pm i\beta$ 是 s 重特征根），则

$$\frac{1}{L(D)}\cos\beta x=\frac{x^{s}}{s!}\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\beta x}}{(2i\beta)^{s}L_1(i\beta)};$$

$$\frac{1}{L(D)}\sin\beta x=\frac{x^{s}}{s!}\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\beta x}}{(2i\beta)^{s}L_1(i\beta)}.$$

特别地，我们有

公式 5*　若 $L(D)=M(D^2)$ 且 $s=0$，即 $L(i\beta)=M(-\beta^2)\neq 0$，则有

$$\frac{1}{M(D^2)}\cos\beta x=\frac{\cos\beta x}{M(-\beta^2)};$$

$$\frac{1}{M(D^2)}\sin\beta x=\frac{\sin\beta x}{M(-\beta^2)}.$$

证明　先设 $L(D)=D-a$，而 a 为常数. 则可先后利用微商的公式和算子的定义，得到

$$(D-a)\left[e^{\gamma x}\frac{1}{(D+\gamma-a)}f(x)\right]$$

$$=\gamma e^{\gamma x}\left[\frac{1}{D+\gamma-a}f(x)\right]-a e^{\gamma x}\left[\frac{1}{D+\gamma-a}f(x)\right]$$

$$+e^{\gamma x}D\left[\frac{1}{D+\gamma-a}f(x)\right]$$

$$=e^{\gamma x}(D+\gamma-a)\left[\frac{1}{D+\gamma-a}f(x)\right]=e^{\gamma x}f(x),$$

因此,我们有

$$\frac{1}{D-a}[e^{\gamma x}f(x)]=e^{\gamma x}\frac{1}{D+\gamma-a}f(x). \tag{4.3}$$

一般地,设 $L(D)=(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)$ 为 L 在复数域中的分解式(其中可能有相同的因式),则由性质 1 和 2,(4.3)式,以及归纳法推出

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\gamma x}f(x)]=\frac{1}{(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)}[e^{\gamma x}f(x)]$$

$$=e^{\gamma x}\frac{1}{(D+\gamma-a_1)(D+\gamma-a_2)\cdots(D+\gamma-a_n)}f(x)$$

$$=e^{\gamma x}\frac{1}{L(D+\gamma)}f(x),$$

所以公式 3 成立.

在公式 3 中取 $f(x)\equiv 1$,并注意 $\frac{1}{L(D)}1=\frac{1}{L(0)}$(这里假设 $L(0)\neq 0$)和 $\frac{1}{D^s}1=\frac{x^s}{s!}$ $(s=0,1,\cdots)$,便可推出

$$\frac{1}{L(D)}e^{\gamma x}=e^{\gamma x}\frac{1}{L(D+\gamma)}1=e^{\gamma x}\frac{1}{D^s}\frac{1}{L_1(D+\gamma)}1$$

$$=e^{\gamma x}\frac{1}{D^s}\frac{1}{L_1(\gamma)}=\frac{e^{\gamma x}}{L_1(\gamma)}\frac{1}{D^s}1=\frac{x^s e^{\gamma x}}{s!L_1(\gamma)},$$

所以公式 4 成立.

最后,在公式 4 中取 $\gamma=i\beta$,并注意 $L(D)=(D^2+\beta^2)L_1(D)=(D-i\beta)^s(D+i\beta)^sL_1(D)$,则有

$$\frac{1}{L(D)}e^{i\beta x}=\frac{x^s e^{i\beta x}}{s!(2i\beta)^sL_1(i\beta)},$$

在等式两侧分别取实部和虚部，就得到公式 5. ▌

【附注 1】　从公式 5* 可以看出，只有 $L(D)=M(D^2)$ 而且 $s=0$ 时，在 $\frac{1}{L(D)}\cos\beta x$（或 $\frac{1}{L(D)}\sin\beta x$）的表达式中才仅有包含 $\cos\beta x$（或 $\sin\beta x$）的项；否则，含 $\cos\beta x$ 和 $\sin\beta x$ 的项可能同时出现. 在用待定系数法假定特解的形式时，这是应该特别注意的.

【例 2】　求解下列微分方程：

（1）　$(D^3-3D^2+4)y=3e^x+e^{2x}$；

（2）　$(D^4+D^2-2)y=\cos 2x$；

（3）　$(D^3-3D^2+4D-2)y=\cos x+e^x\sin x$；

解　（1）$L(D)=D^3-3D^2+4=(D-2)^2(D+1)$，

利用公式 4*、公式 4 和性质 1 可得

$$\frac{1}{L(D)}e^x=\frac{1}{(D-2)^2(D+1)}e^x=\frac{1}{2}e^x,$$

和

$$\frac{1}{L(D)}e^{2x}=\frac{1}{(D-2)^2(D+1)}e^{2x}$$

$$=\frac{1}{(D-2)^2}\frac{1}{3}e^{2x}=\frac{x^2}{6}e^{2x}.$$

再利用性质 1，得到特解

$$y^*=\frac{1}{L(D)}(3e^x+e^{2x})=\frac{3}{2}e^x+\frac{x^2}{6}e^{2x}.$$

另一方面，由上节定理 6* 可知，相应齐次线性方程的通解是

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{2x}.$$

所以，原方程的通解是

$$y=C_1e^{-x}+\left(C_2+C_3x+\frac{x^2}{6}\right)e^{2x}+\frac{3}{2}e^x,$$

其中 C_1，C_2 和 C_3是任意常数.

（2）$L(D)=D^4+D^2-2=(D^2-1)(D^2+2)=M(D^2)$. 注意，$M(-4)=10$，所以由公式 5* 推得一个特解为

$$\frac{1}{L(D)}\cos 2x = \frac{1}{M(D^2)}\cos 2x = \frac{1}{10}\cos 2x.$$

再加上相应齐次线性方程的通解，就得出所求方程的通解为

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

(3) 因为 $L(D) = D^3 - 3D^2 + 4D - 2 = (D-1)(D^2 - 2D + 2)$，所以相应的特征根为 1 和 $1 \pm i$. 利用公式 4* 推得

$$\frac{1}{L(D)}e^{ix} = \frac{e^{ix}}{L(i)} = \frac{e^{ix}}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}e^{ix}.$$

在上式两侧取实部即得

$$\frac{1}{L(D)}\cos x = \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x).$$

再利用公式 4(此时取 $\gamma = 1 + i$ 和 $s = 1$) 推得

$$\frac{1}{L(D)}e^{(1+i)x} = \frac{1}{[D-(1+i)][D-(1-i)](D-1)}e^{(1+i)x}$$

$$= \frac{x}{2i\cdot i}e^{(1+i)x} = -\frac{x}{2}e^{(1+i)x},$$

在上式两侧取虚部即得

$$\frac{1}{L(D)}e^{x}\sin x = -\frac{x}{2}e^{x}\sin x.$$

这样，我们得到原方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{L(D)}(\cos x + e^{x}\sin x) = \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) - \frac{x}{2}e^{x}\sin x,$$

而原方程的通解为

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{x}\cos x + \left(C_3 - \frac{x}{2}\right)e^{x}\sin x + \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x),$$

其中 C_1，C_2 和 C_3为任意常数. ▌

当 $f(x)$ 是多项式时，为了用算子法求微分方程(4.1)的特解，我们还需要下面的公式.

公式 6 $\quad \dfrac{1}{L(D)}f_m(x) = \dfrac{1}{D^s}\overline{Q}_m(D)f_m(x),$

其中 $f_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式，$L(D) = D^s\overline{L}(D)$ 且 $\overline{L}(0) \neq 0$，而

$\overline{Q}_m(D)$ 是把 $\overline{L}(D)$ 按 D 的升幂排列后用通常多项式除法去除 1，在第 $m+1$ 步上得到的商式（它是 D 的 m 次多项式）.

特别地，若 $s=0$（即 $L(0)\neq 0$），则有

公式 6*　　$\dfrac{1}{L(D)}f_m(x)=Q_m(D)f_m(x)$，

其中 $Q_m(D)$ 是以 $L(D)$ 按 D 的升幂排列后去除 1 时在第 $m+1$ 步上得到的商式.

证明　从公式 6* 出发，应用公式 1 和算子多项式的性质 1 直接可得公式 6，因此我们只须证明公式 6* 即可.

由假设条件可知，如果把 $L(D)$ 看成通常的 D 的多项式，则有

$$\frac{1}{L(D)}=Q_m(D)+\frac{R(D)}{L(D)},$$

其中 $R(D)$ 是把 $L(D)$ 按 D 的升幂排列后再按通常多项式除法去除 1 时在第 $m+1$ 步上所得的余式，因而它是从 D 的 $m+1$ 次开始按 D 的升幂排列的一个多项式. 上式可以改写成

$$1=L(D)Q_m(D)+R(D).$$

由于算子多项式的加法和乘法运算与通常多项式相同，因此上式对算子多项式也成立. 把上式两端都作用到 $f_m(x)$ 上，并注意 $R(D)f_m(x)\equiv 0$，就得到

$$f_m(x)=L(D)[Q_m(D)f_m(x)],$$

由此得出公式 6*. ∎

【附注 2】　公式 3 — 公式 6 可看作 §3 中待定系数法的理论依据，在那里我们对常系数非齐次线性微分方程的特解形式作了先天的假定.

【例 3】　求下列微分方程的特解：

(1)　$(D^3+3D^2-D)y=x^3+1$；

(2)　$(2D^2-3D+8)y=x^2\cos 2x$.

解　(1)　$L(D)=D^3+3D^2-D=D(D^2+3D-1)$. 以 $-1+3D+D^2$ 去除 1，在第 4 步上得到商式 $Q_3(D)=-1-3D-10D^2-33D^3$. 利用公式 6 得到原方程的一个特解为

$$\frac{1}{L(D)}(x^3+1)=\frac{1}{D}(-1-3D-10D^2-33D^3)(x^3+1)$$
$$=\frac{1}{D}(-x^3-9x^2-60x-199)$$
$$=-\frac{x^4}{4}-3x^3-30x^2-199x.$$

(2)　$L(D)=2D^2-3D+8$，利用公式 3 得出

$$\frac{1}{L(D)}x^2e^{2ix}=e^{2ix}\frac{1}{L(D+2i)}x^2$$
$$=e^{2ix}\frac{1}{2D^2+(-3+8i)D-6i}x^2,$$

以 $-6i+(-3+8i)D+2D^2$去除 1，在第 3 步上得商式

$$Q_2(D)=\frac{1}{6}i+(-\frac{1}{12}+\frac{2}{9}i)D+(-\frac{1}{6}+\frac{55}{216}i)D^2.$$

因此，由公式 6 得到

$$\frac{1}{L(D)}x^2e^{2ix}=e^{2ix}Q_2(D)x^2$$
$$=e^{2ix}\left[\frac{i}{6}x^2+(-\frac{1}{6}+\frac{4}{9}i)x+(-\frac{1}{3}+\frac{55}{108}i)\right],$$

在上式两侧分别取实部，即可得到所求的特解为

$$\frac{1}{L(D)}x^2\cos 2x=-(\frac{1}{6}x+\frac{1}{3})\cos 2x-(\frac{x^2}{6}+\frac{4}{9}x+\frac{55}{108})\sin 2x.$$ ▌

最后还要指出，上述的算子法也可以用来求常系数非齐次线性微分方程组的特解. 考虑微分方程组

$$\begin{cases} L_{11}(D)y_1+L_{12}(D)y_2+\cdots+L_{1n}(D)y_n=f_1(x), \\ L_{21}(D)y_1+L_{22}(D)y_2+\cdots+L_{2n}(D)y_n=f_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{n1}(D)y_1+L_{n2}(D)y_2+\cdots+L_{nn}(D)y_n=f_n(x), \end{cases} \tag{4.4}$$

我们把算子多项式 $L_{ij}(D)$ 看成 $y_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的系数，并记“系数行列式”为

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} L_{11}(D) & L_{12}(D) & \cdots & L_{1n}(D) \\ L_{21}(D) & L_{22}(D) & \cdots & L_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1}(D) & L_{n2}(D) & \cdots & L_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

则直接代入方程组(4.4),就可以验证它的一个特解是

$$y_j{}^* = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}(D)\left[\frac{1}{\Delta(D)}f_k(x)\right], \quad (j=1,2,\cdots,n) \qquad (4.5)$$

其中 $A_{kj}(D)$ 是 $\Delta(D)$ 中元素 $L_{kj}(D)$ 的代数余子式. 在这里应该注意(4.5)中的运算顺序:先对 $f_k(x)$ 施行运算 $\frac{1}{\Delta(D)}$, 然后再施行运算 $A_{kj}(D)$.

【例 4】 求解微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

解 可把方程组(4.6)改写为

$$\begin{cases} (D-3)y_1 - y_2 = 2x, \\ 4y_1 + (D+1)y_2 = 0, \\ -4y_1 + 8y_2 + (D+2)y_3 = e^x. \end{cases}$$

则

$$\Delta(D) = D^3 - 3D + 2 = (D+2)(D-1)^2,$$

且

$$\frac{1}{\Delta(D)}2x = x + \frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{\Delta(D)}0 = 0, \quad \frac{1}{\Delta(D)}e^x = \frac{x^2}{6}e^x;$$

$$A_{11}(D) = (D+1)(D+2), \quad A_{12}(D) = *, \quad A_{13}(D) = 4(D+9),$$

$$A_{21}(D) = (D+2), \qquad A_{22}(D) = *, \quad A_{23}(D) = -4(2D-7)$$

$$A_{31}(D) = 0, \qquad A_{32}(D) = *, \quad A_{33}(D) = D^2 - 2D + 1,$$

(其中的 * 表示无需算出的式子). 把以上结果代入公式(4.5),就可得到微分方程组(4.6)的一个特解为

$$\begin{cases} y_1 = 2x + 6, \\ y_2 = -8x - 16, \\ y_3 = 36x + 58 + \dfrac{1}{3}e^x. \end{cases}$$

最后，再加上相应齐次线性微分方程组的通解(见 §2 例 5)，就可得到原方程组(4.6) 的通解为

$$y = C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-2x} + C_2\begin{pmatrix}11+15x\\-7-30x\\100x\end{pmatrix}e^x$$

$$+ C_3\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}e^x + \begin{pmatrix}2x+6\\-8x-16\\36x+58+\dfrac{1}{3}e^x\end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3是任意常数. ▌

4.2 拉氏变换法

假设函数$f(t)$在区间 $[0,\infty)$ 上分段连续. 如果含参变量s的无穷积分

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{4.7}$$

收敛，则称函数$F(s)$为$f(t)$的**拉普拉斯变换**，或简称为**拉氏变换**，并记为

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\};$$

反之，称$f(t)$为$F(s)$的**拉普拉斯反演变换**，或简称为**拉氏逆变换**，并记为

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

有时也称$F(s)$为**象函数**，而称$f(t)$为**原函数**.

在拉氏变换的一般理论中，假定参变量s是复的. 但是，我们在这里只限于讨论s是实的情形.

读者可直接验证，如果函数$f(t)$在$[0,\infty)$上分段连续，而且

当 $t \geqslant b > 0$ 时满足不等式

$$|f(t)| \leqslant A e^{kt}, \tag{4.8}$$

其中 A 和 k 都是实的常数（且 $A \geqslant 0$），则 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 当 $s > k$ 时存在.

【例 5】 我们有

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (s > 0);$$

$$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}, \quad (s > \alpha);$$

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad (s > 0);$$

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad (s > 0).$$

证明 由(4.7)式，直接计算可得

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1dt = \frac{1}{s}, \quad (s > 0);$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{1}{s-\alpha}, \quad (s > \alpha).$$

当 $s > 0$ 时，可先后利用分部积分法，推出

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t dt &= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt \\ &= \frac{1}{\omega} - \left(\frac{s}{\omega}\right)^2\int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t dt,\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t dt = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

类似有

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad (s > 0). \quad \blacksquare$$

我们把例 5 中的结果以及一些简单的计算结果列成下表，以备今后查用.

表格 1　拉氏变换简表

编号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$, $(s>0)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $(s>a)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $(s>0)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $(s>0)$
5	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $(s>\|a\|)$
6	$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $(s>\|a\|)$
7	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $(s>a)$
8	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$, $(s>a)$
9	t^n(n 是正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $(s>0)$
10	$t^n e^{at}$(n 是正整数)	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $(s>a)$
11	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, $(s>0)$
12	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $(s>0)$
13	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14	$f(at)$, $(a>0)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
15	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
16	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty}F(s)ds$
18	$f(t-a)$, $(a>0)$	$e^{-as}F(s)$

为了用拉氏变换求解常系数线性微分方程的初值问题，我们还需要下面两个重要的定理，其中第一个的证明容易从(4.7)式直接推出，故从略.

定理 7 拉氏变换 $\mathscr{L}$ 及其逆变换 $\mathscr{L}^{-1}$ 都是线性算子，即

$$\mathscr{L}\{C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\}=C_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+C_2\mathscr{L}\{f_2(t)\},$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{C_1F_1(s)+C_2F_2(s)\}=C_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}+C_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

其中 C_1 和 C_2 为常数. ▌

定理 8 设 $f(t)$, $f'(t)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t)$ 都在区间 $[0,\infty)$ 上连续，而且分别满足关系式(4.8)，即存在常数 $A(>0)$ 和 k，使得

$$|f^{(m)}(t)|\leqslant A\,e^{kt},\quad (0<a\leqslant t<\infty) \tag{4.9}$$

$(m=0,1,\cdots,n-1)$，这里记 $f^{(0)}(t)\equiv f(t)$；又设 $f^{(n)}(t)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上分段连续. 则当 $s>k$ 时 $f(t)$, $f'(t)$, $\cdots$, $f^{(n)}(t)$ 的拉氏变换都存在，而且

$$\mathscr{L}\{f^{(m)}(t)\}=s^m\mathscr{L}\{f(t)\}-$$

$$[s^{m-1}f(0)+s^{m-2}f'(0)+\cdots+f^{(m-1)}(0)], \tag{4.10}$$

$$(m=1,2,\cdots,n).$$

证明 先证 $n=1$ 的情形. 由于 $f(t)$ 满足(4.9) $(m=0)$，所以当 $s>k$ 时 $\mathscr{L}\{f(t)\}$ 存在. 因为 $f'(t)$ 在 $[0,\infty)$ 分段连续，所以对于任何常数 $T>0$，在区间 $(0,T)$ 内 $f'(t)$ 只有有限个间断点 t_1, t_2, $\cdots$, t_r. 考虑积分

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt=$$

$$\int_0^{t_1}e^{-st}f'(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f'(t)dt+\cdots+\int_{t_r}^{T}e^{-st}f'(t)dt.$$

对上式右端各项分别作分部积分，并利用 $f(t)$ 的连续性得出

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt=(e^{-sT}f(T)-f(0))+s\int_0^T e^{-st}f(t)dt. \tag{4.11}$$

由不等式(4.9) $(m=0)$ 可推出

$$|e^{-sT}f(T)|\leqslant A\,e^{-(s-k)T}.$$

从而，当 $s>k$ 时我们有

$$\lim_{T\to\infty}e^{-sT}f(T)=0.$$

所以，在(4.11)中令 $T\to\infty$，就得到 $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ 的存在性，而且

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=s\mathscr{L}\{f(t)\}-f(0). \tag{4.12}$$

再考虑 $n=2$ 的情形．此时上面的推理与(4.12)式仍然成立．由于 $f'(t)$ 连续且满足(4.9)$(m=1)$，而 $f''(t)$ 在 $[0,\infty)$ 分段连续，所以在上面的推导中以 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 分别代替 $f(t)$ 和 $f'(t)$，就可得知 $\mathscr{L}\{f''(t)\}$ 存在，并且

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=s\mathscr{L}\{f'(t)\}-f'(0). \tag{4.13}$$

再把(4.12)代入(4.13)，就可得到

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=s^2\mathscr{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0). \tag{4.14}$$

重复上述推理过程，不难由归纳法得知 $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}$ 存在，并且对任意正整数 n，公式(4.10)都成立．▌

现在，我们可以用拉氏变换法来求解常系数线性微分方程了．

【例 6】 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=\sin 2t,\\ y(0)=0,\quad y'(0)=1.\end{cases}$$

解 在方程两侧取拉氏变换，并利用它的线性性质，我们有

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{\sin 2t\},$$

令 $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$，并对上式左侧的第一项应用(4.14)，而对右侧利用表格 1，得到

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+Y(s)=\frac{2}{s^2+4},$$

再把给定的初值条件代入上式，我们推出

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

为了从上面的象函数 $Y(s)$ 得到原函数 $y(t)$，我们把上式右侧分解成简单的部分分式之和，即

$$Y(s)=\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}.$$

然后，通过反查表格 1，并利用定理 7 得出

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{5}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t.$$

亦即，所求初值问题的解为

$$y(t)=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t,\quad (0\leqslant t<\infty).$$

（注意，这也是初值问题在 $-\infty<t<\infty$ 上的唯一解.）▌

【例 7】 求解初值问题

$$\begin{cases} y'''-3y''+4y'-2y=\cos t+e^t\sin t, \\ y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0',\quad y''(0)=y_0''. \end{cases}$$

解 在方程两侧取拉氏变换（在左侧利用定理 8，在右侧应用表格 1），并记 $\mathscr{L}\{f(t)\}=Y(s)$，得到

$$[s^3Y(s)-s^2y_0-sy_0'-y_0'']-3[s^2Y(s)-sy_0-y_0']$$

$$+4[sY(s)-y_0]-2Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1},$$

亦即

$$Y(s)=\frac{y_0s^2+(y_0'-3y_0)s+(y_0''-3y_0'+4y_0)}{(s-1)[(s-1)^2+1]}$$

$$+\frac{s}{(s-1)(s^2+1)[(s-1)^2+1]}+\frac{1}{(s-1)[(s-1)^2+1]^2}$$

$$=\frac{\alpha}{s-1}+\frac{\beta(s-1)+\gamma}{(s-1)^2+1}+\frac{s+3}{10(s^2+1)}+\frac{-s+1}{[(s-1)^2+1]^2},$$

其中

$$\begin{cases} \alpha=-6y_0-2y_0'+y_0''+\dfrac{2}{3}, \\ \beta=-y_0+2y_0'-y_0''-\dfrac{5}{3}, \\ \gamma=-y_0+2y_0'-\dfrac{23}{30}. \end{cases} \tag{4.15}$$

反查表格 1,并注意表中第 11 及 13 栏的公式,可得

$$\mathscr{L}\{te^t\sin t\}=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

所以 $Y(s)$ 的原函数为

$$y(t)=\alpha e^t+\beta e^t\cos t+\gamma e^t\sin t+\frac{1}{10}(\cos t+3\sin t)-\frac{t}{2}e^t\sin t, \tag{4.16}$$

其中 α, β 和 γ 由(4.15)式确定. 容易看出,(4.16)不仅给出初值问题在 $0\leqslant t<\infty$ 上的解,而且给出在 $-\infty<t<\infty$ 上的解. 此外,如果 y_0, y_0' 和 y_0'' 是彼此无关的任意常数,则 α, β 和 γ 也是彼此独立的任意常数,因而(4.16)就是微分方程的通解.

【附注 3】 从上面的两个例子中读者可以看出,用拉氏变换法求解常系数线性微分方程至少有如下两个优点:

1) 把关于 $y(t)$ 的微分方程转化成关于象函数 $Y(s)$ 的代数方程,从而容易确定 $Y(s)$. 剩下来的工作只是通过查表:从象函数 $Y(s)$ 求得原函数 $y(t)$.

2) 由于在求解过程中已同时利用了初值条件,因此用拉氏变换求得的解是初值问题的解. 如果把初值视为任意常数,则用拉氏变换求得的解也就是通解(参见例 7). 但是,如果用一般的方法,先求通解,然后利用初值条件再确定通解中的任意常数,那么与上述拉氏变换法相比,计算量要大得多.

另外,用拉氏变换法还可以处理含间断的强迫函数或冲量函数的微分方程. 有兴趣的读者可参考文献[**14**]或[**15**].

象在算子法中应用公式一样,在拉氏变换法中应用查表可使计算简捷. 然而这也限制了可求解的微分方程需要在表格有效的范围内. 此外,把象函数 $Y(s)$ 分解成简单的部分分式,仍有相当的计算量. 读者可以把例 7 和用算子法求解例 2 中的(3)进行比较.

【附注 4】 用拉氏变换法求解微分方程,要应用定理 7、定理 8 和表格 1 等,而应用这些结果都是有条件的. 在实际求解时,

与其验证这些条件，不如直接去验证得到的函数是否满足所求的初值问题. 事实上，当常系数线性微分方程的右端函数连续时，它的初值问题总存在着唯一解. 因此，一旦得到了这个(唯一)解，就无须再去追究求解过程的严格性. 例如，可以不必考虑条件(4.9)是否成立. 不仅如此，解的存在区间常常可以突破拉氏变换的束缚而得以扩大. 例如，在例6和例7中应用定理8时，我们只能肯定函数 $y(t)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上是所求初值问题的解. 但容易看出，实际所得解的存在区间都可以扩大为 $(-\infty,\infty)$.

为了从乘积形式的象函数 $F(s)G(s)$ 来求出相应的原函数 $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$，我们还需要下述有关卷积的概念.

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都在 $[0,T)$ 可积，则称积分

$$\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi \quad \left(\text{或} \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi\right)$$

$(0\leqslant t\leqslant T)$ 为函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积，并把它记为 $f(t)*g(t)$.

定理 9 设 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ 与 $G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}$ 当 $s>k$ 时都存在，则

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t). \tag{4.17}$$

证明 由(4.7)式可得

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi\cdot\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)d\eta \\
&= \int_0^\infty g(\eta)\left(\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\xi)d\xi\right)d\eta \\
&= \int_0^\infty g(\eta)\left(\int_\eta^\infty e^{-st}f(t-\eta)dt\right)d\eta \quad (\text{作变换 } t=\xi+\eta) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-\eta)g(\eta)d\eta\right)dt \quad (\text{交换累次积分次序}) \\
&= \int_0^\infty e^{-st} f(t)*g(t)dt. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

【例 8】 求解初值问题

$$\begin{cases} y''+\omega^2 y=f(t), \quad (\omega\neq 0) \\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0', \end{cases}$$

其中 $f(t)$ 是在整个实轴上的连续函数.

解　在方程两侧作拉氏变换 $(0\leqslant t<\infty)$，并假定 $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$ 和 $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ 都存在，我们有

$$(s^2+\omega^2)Y(s)-sy_0-y_0'=F(s),$$

亦即

$$Y(s)=\frac{y_0s+y_0'}{s^2+\omega^2}+\frac{F(s)}{s^2+\omega^2}.$$

上式右侧第一项的原函数可应用表格 1 中的第 3 和第 4 栏直接查到，即得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{y_0s+y_0'}{s^2+\omega^2}\right\}=y_0\cos\omega t+\frac{y_0'}{\omega}\sin\omega t,$$

而第二项的原函数则需要应用定理 9 的卷积公式(4.17)和表格 1 推出：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+\omega^2}\right\}&=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}\\&=f(t)*\frac{1}{\omega}\sin\omega t\\&=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\xi)\sin\omega(t-\xi)d\xi.\end{aligned}$$

所以，初值问题的解为

$$y=y_0\cos\omega t+\frac{y_0'}{\omega}\sin\omega t+\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\xi)\sin\omega(t-\xi)d\xi,$$

其中解的存在区间 $0\leqslant t<\infty$ 可自然扩展到 $-\infty<t<\infty$. ▌

利用拉氏变换法，还可以求解常系数线性微分方程组的初值问题. 我们通过下面的例子来说明这一点.

【例 9】　求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=-p\sin\omega t,\\[2ex] x-\dfrac{dy}{dt}=-p\cos\omega t,\\[2ex] x(0)=1,\quad y(0)=0.\end{cases}$$

解 在这两个方程的两侧分别取拉氏变换，记 $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ 和 $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$，并利用相应的初值条件可得

$$\begin{cases} sX(s)+Y(s)=-\dfrac{p\omega}{s^2+\omega^2}+1, \\[2ex] X(s)-sY(s)=-\dfrac{ps}{s^2+\omega^2}. \end{cases}$$

由此可得到

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\left[s-\dfrac{ps(\omega+1)}{s^2+\omega^2}\right], \\[2ex] Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\left[(p+1)-\dfrac{p\omega(\omega+1)}{s^2+\omega^2}\right], \end{cases} \tag{4.18}$$

当 $\omega\neq 1$ 时，可将上式分解成部分分式的形式：

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{p}{1-\omega}\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right), \\[2ex] Y(s)=\dfrac{p+1}{s^2+1}+\dfrac{p}{1-\omega}\left(\dfrac{\omega}{s^2+1}-\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right). \end{cases}$$

因此，反查表格 1，得到所求初值问题的解为

$$\begin{cases} x(t)=\cos t+\dfrac{p}{1-\omega}(\cos t-\cos\omega t), \\[2ex] y(t)=(p+1)\sin t+\dfrac{p}{1-\omega}(\omega\sin t-\sin\omega t). \end{cases} \tag{4.19}$$

当 $\omega=1$ 时，(4.18) 式成为

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{2ps}{(s^2+1)^2}, \\[2ex] Y(s)=\dfrac{p+1}{s^2+1}-\dfrac{2p}{(s^2+1)^2}=\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{p(s^2-1)}{(s^2+1)^2}. \end{cases}$$

此时，同样可反查表格 1，得到初值问题的解为

$$\begin{cases} x(t)=\cos t-pt\sin t, \\ y(t)=\sin t+pt\cos t. \end{cases} \tag{4.20}$$

（容易验证：初值问题的解 (4.19) 或 (4.20) 的存在区间都可突破拉氏变换法的限制而自然扩展到 $-\infty<t<\infty$ 上.）▌

习　题　6-4

1. 用算子法求解下列问题：

(1)　$(D^2+4)y=8\sin 2x$；

(2)　$(D^2+1)y=\sin x-\cos 2x$；

(3)　$(D^2-6D+10)y=e^{3x}$；

(4)　$(D^2-4D+4)y=x^2$；

(5)　$(D^2-6D+8)y=e^x+e^{2x}$；

(6)　$(D^2+4)y=x\sin 2x$；

(7)　$(D^2+2D+1)y=\mathrm{sh}x$；

(8)　$(D^2-2D+2)y=xe^x\cos x$；

(9)　$(D^3+D^2+D-1)y=xe^x$；

(10)　$(D^3-5D^2+8D-4)y=e^{2x}+2e^x+3e^{-x}$；

(11)　$(D^3-3D^2+4D-2)y=e^x+\cos x$；

(12)　$(D^3+D^2+D+1)y=\cos 2x+\cos 3x$；

(13)　$(D^4+3D^2-4)y=e^x$；

(14)　$(D^2+1)^2y=x^2\cos x$；

(15)　$(D^6-3D^5+3D^4-D^3)y=x$.

2. 用拉氏变换法求解下列初值问题：

(1)　$y''-y'-6y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1$；

(2)　$y''+3-y'+2y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$；

(3)　$y''+\omega^2y=\cos 2t,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$；

(4)　$y''-2y'+2y=e^{-t},\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$；

(5)　$y''-4y'+4y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$；

(6)　$y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$,

$y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=y'''(0)=1$.

3. 证明卷积的下列性质：

(1)　$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$；

(2)　$[f(t)*g(t)]*h(t)=f(t)*[g(t)*h(t)]$；

(3)　$f(t)*[g(t)+*h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$；

(4)　$0*f(t)=f(t)*0=0$.

此外，考察下面的关系是否成立：

(a) $1 * f(t) = f(t)$;

(b) $f(t) * f(t) \geqslant 0$?

4. 用算子法和拉氏变换法分别求解下列微分方程组:

(1) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + x + y = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = e^{-t}; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + y = t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} + y + z = 2t, \\ \dfrac{dz}{dt} + z = t; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 6x + 7y = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 3x + 2y = 2t; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sh}2t, \\ 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 2t. \end{cases}$$

第七章　微分方程的幂级数解法

通过前几章的讨论，我们已经知道，能用初等函数的有限形式求解的微分方程只局限于某些特殊的类型. 因此，欲扩大微分方程的求解范围，应该放弃解的“有限形式”，而转向寻求“无限形式”的解，例如无穷级数解.

事实上，牛顿和莱不尼兹早就用级数解法求解过某些微分方程. 欧拉也曾用级数解法研究过两类重要的微分方程，后来哥尼兹堡天文台台长贝塞尔(Bessel，1784－1846)详细地探讨了其中一类方程，现在称之为贝塞尔方程；而另一类方程，即所谓超几何方程，则由高斯(Gauss，1777－1855)等人作了进一步研究.

人们对这些方程的级数解法有很大兴趣，一个重要的原因是，它们的级数解所代表的函数在数学物理中有特殊的应用，而且它们一般已不是初等函数. 因此称它们为特殊函数或高级超越函数，以示与普通初等函数的区别.

本章的主要内容是，用幂级数解法求解勒让德(Legendre，1752－1833)方程和用广义幂级数解法求解贝塞尔方程，并讨论所得到的两个重要的特殊函数：勒让德多项式和贝塞尔函数. 这些内容对于进一步学习数学物理方程是不可缺少的.

*§1.　柯西定理

第一个从理论上研究初值问题收敛的幂级数解的存在和唯一性的人，正是我们在第三章中提到过的柯西. 他在1820－1830年间用欧拉折线法证明了初值问题解的存在定理(这定理后来由李卜西兹和皮亚诺等人作了发展)之后，又在1839－1842年间用优级数

法成功地建立了初值问题收敛的幂级数解的存在和唯一性定理．我们将在下面介绍这个定理．

为了叙述上的简单起见，我们只讨论一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

其中函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内**解析**，即对于 G 内的任意一点 (x_0,y_0)，存在正的常数 a 和 b，使得函数 $f(x,y)$ 在邻域

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

内可以展成 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的（收敛）幂级数

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

以下我们研究初值问题

$$(E):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的（收敛）幂级数解．

根据毕卡定理，初值问题 (E) 的解 $y=y(x)$ 在 x_0 点的某个邻域 $|x-x_0|\leqslant h$ 内存在且唯一．现在的问题是，要证明这个解 $y=y(x)$ 在 x_0 点附近是**解析的**，即 $y=y(x)$ 在 x_0 点的某邻域内可以展开成 $(x-x_0)$ 的（收敛）幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n.$$

在给出柯西定理之前，我们先做些准备．

假设有两个幂级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{1.1}$$

和

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j,\quad (A_{ij}\geqslant 0) \tag{1.2}$$

其中系数 a_{ij} 和 A_{ij} 满足不等式

$$|a_{ij}|\leqslant A_{ij},\quad (i,j=0,1,2,\cdots),$$

则称(1.2)是(1.1)的一个**优级数**(或**强级数**).如果幂级数(1.2)在区域D:$|x-x_0|<\alpha$,$|y-y_0|<\beta$内还是收敛的,则它的和函数$F(x,y)$叫作幂级数(1.1)在D内的一个**优函数**(或**强函数**).

引理1 设函数$f(x,y)$在矩形区域

$$R: \quad |x-x_0|<\alpha, \quad |y-y_0|<\beta$$

上可以展成$(x-x_0)$和$(y-y_0)$的一个收敛的幂级数,则存在常数$M>0$,使得函数

$$F(x,y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{b}\right)} \tag{1.3}$$

是$f(x,y)$在矩形区域

$$R_0: \quad |x-x_0|<a, \quad |y-y_0|<b$$

内的一个优函数,其中正数$a<\alpha$和$b<\beta$.

证明 由于$f(x,y)$可以在R上展成一个收敛的幂级数

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

因此,对于任意取定的正数$a<\alpha$和$b<\beta$,正项级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_{ij}|a^ib^j$$

是收敛的.从而它的通项有界,即存在常数$M>0$,使得

$$|a_{ij}|a^ib^j\leqslant M, \quad 亦即 \quad |a_{ij}|\leqslant\frac{M}{a^ib^j}, \tag{1.4}$$

其中$i,j=0,1,\cdots$. 然后,我们在R_0内由(1.3)定义函数$F(x,y)$. 因此,当$(x,y)\in R_0$时,我们有如下的收敛幂级数展开式

$$F(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{M}{a^ib^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

而且,不等式(1.4)蕴含$F(x,y)$是$f(x,y)$在R_0内的优函数. ▌

引理2 设函数$F(x,y)$在R_0上由(1.3)式给定,则初值问题

$$(\hat{E}):\qquad \frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在 $|x-x_0|<\rho$ 内存在解析解 $y=\hat{y}(x)$，其中 $\rho=a(1-e^{-b/2aM})$，而正数 a,b 和 M 的意义同上.

证明 利用分离变量法求解$(\hat{E})$，我们有

$$\int_{y_0}^{y}\left(1-\frac{y-y_0}{b}\right)dy=\int_{x_0}^{x}\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{a}}dx,$$

积分后得到

$$\frac{b}{2}\left(1-\frac{y-y_0}{b}\right)^2-\frac{b}{2}=aM\ln\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right),$$

由此解出$(\hat{E})$的解为

$$y=\hat{y}(x)=y_0+b-b\sqrt{1+\frac{2aM}{b}\ln\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)}.\qquad(1.5)$$

由于 $\rho<a$，因此当 $|x-x_0|<\rho$ 时 $\ln\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)$ 可以展成 $(x-x_0)$ 的幂级数. 另一方面，当 $|s|<1$ 时，$\sqrt{1+s}$ 可以展成 s 的幂级数. 因为当 $|x-x_0|<\rho$ 时，我们有

$$\left|\frac{2aM}{b}\ln\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)\right|<1,$$

所以利用幂级数代入幂级数的法则可知，函数(1.5)当 $|x-x_0|<\rho$ 时可展成 $(x-x_0)$ 的幂级数；即 $y=\hat{y}(x)$ 是解析的. ▌

现在，我们可以陈述并证明本节的主要定理了.

定理1 (柯西定理) 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 上可以展开成 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的一个收敛的幂级数，则初值问题(E)在 x_0 点的邻域 $|x-x_0|<\rho$ 内有一个解析解 $y=y(x)$，而且它是唯一的. 此处区域 R 和常数 ρ 的意义同上.

证明 首先，根据假设把 $f(x,y)$ 在 R 上展成它的幂级数(泰勒级数)

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.\qquad(1.6)$$

其次，作(E)的形式解

$$y=y_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x-x_0)^n. \tag{1.7}$$

则可以通过直接的计算得到

$$C_1=y'(x_0)=f(x_0,y_0)=a_{00},$$

$$C_2=\frac{1}{2!}y''(x_0)=\frac{f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)y'(x_0)}{2!}=\frac{a_{10}+a_{01}a_{00}}{2!},$$

……………………………………………………

一般地，我们有

$$C_n=\frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)=P_n(a_{00},a_{01},a_{10},\cdots,a_{n-1,0}), \tag{1.8}$$

其中$n=1,2,\cdots$，P_n是关于$a_{00},a_{01},a_{10},\cdots,a_{n-1,0}$的一个多项式，而且它的系数都是正数，只与标号$n$有关而与$f$无关. 按这种方式可以唯一地确定形式解(1.7). 因此，这形式解是唯一的；由此直接推出(E)的解析解是唯一的. 我们尚须证明解析解的存在性，亦即证明幂级数解(1.7)的收敛性. 为此，考虑初值问题

$$(\hat{E}):\qquad \frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中

$$F(x,y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{b}\right)},$$

而常数a，b和M的意义见引理1. 根据引理1，$F(x,y)$是$f(x,y)$在R_0内的优函数，即$F(x,y)$在R_0内可展成幂级数

$$F(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j. \tag{1.9}$$

而且

$$|a_{ij}|\leqslant A_{ij},\quad (i,j=0,1,2,\cdots). \tag{1.10}$$

再作$(\hat{E})$的形式解

$$y = \hat{y}(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n (x - x_0)^n, \tag{1.11}$$

则由(1.8)中多项式 P_n 的性质易知 $\hat{C} = P_n(A_{00}, A_{01}, A_{10}, \cdots, A_{n-1,0})$. 因此,再利用不等式(1.10)可推出

$$\begin{aligned} \hat{C}_n &= P_n(A_{00}, A_{01}, A_{10}, \cdots, A_{n-1,0}) \\ &\geqslant |P_n(a_{00}, a_{01}, a_{10}, \cdots, a_{n-1,0})| = |C_n|, \end{aligned}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$. 这说明(1.11)是(1.7)的一个优级数. 而引理2告诉我们,级数(1.11)在邻域 $|x - x_0| < \rho$ 内收敛. 因此,级数(1.7)也至少在 $|x - x_0| < \rho$ 内收敛. 这就完成了定理1的证明. ▌

【附注1】　非解析的微分方程可能没有形式的幂级数解,例如

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x}, \quad y(0) = 0.$$

事实上,假设不然. 设它有收敛的幂级数解

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots,$$

则把它代入方程,并且比较常数项,就推出 $C_1 = C_1 - 1$,这是一个矛盾.

【附注2】　非解析微分方程的形式解可能不收敛,例如

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = 0$$

有形式解

$$y = x + x^2 + 2!x^3 + \cdots + n!x^{n+1} + \cdots,$$

它对任意 $x \neq 0$ 都不收敛.

【附注3】　优级数方法也可以应用于微分方程组的情形. 事实上,考虑微分方程组的初值问题

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \cdots, y_n), \quad y_k(0) = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.12}$$

(不失一般性,这里取自变量和未知函数的初值均为零.)

假设右端函数 f_k 在区域

$$|x| \leqslant \alpha, \ |y_1| \leqslant \beta, \ \cdots, \ |y_n| \leqslant \beta$$

内可以展成收敛的幂级数

$$f_k(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{i, j_1, \cdots, j_n = 0}^{\infty} a_{i, j_1, \cdots, j_n}^{(k)} x^i y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}, \quad (1.13)$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$，则与引理 1 类似可证，对于正数 $a < \alpha$ 和 $b < \beta$，存在 $M > 0$，使得函数

$$G(x, y_1, \cdots, y_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y_1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{y_n}{b}\right)}$$

是(1.13)(对任意的 k，$1 \leqslant k \leqslant n$) 在区域

$$|x| \leqslant a, \ |y_1| \leqslant b, \ \cdots, \ |y_n| \leqslant b$$

内的一个优函数. 我们用与定理 1 同样的推理可知：为了证明初值问题(1.12) 在 $x = 0$ 的某邻域内有收敛的幂级数解，只需证明相关的初值问题

$$\frac{dy_k}{dx} = G(x, y_1, \cdots, y_n), \quad y_k(0) = 0, \quad (1.14)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

在 $x = 0$ 的某邻域内有收敛的幂级数解即可.

注意，方程组(1.14) 的右端函数 G 与 k 无关. 因此，只要标量函数 y 的初值问题

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)^n}, \quad y(0) = 0 \quad (1.15)$$

有解 $y = y(x)$，则 $\{y_i = y(x), i = 1, 2, \cdots, n\}$ 就是(1.14) 的解. 与引理 2 类似可证，初值问题(1.15)在 $x = 0$ 的某邻域内确有收敛的幂级数解. 这样，就可以推断出微分方程组(1.12) 有收敛的幂级数解.

习　题　7-1

1. 陈述并详细证明微分方程组的柯西定理.

2. 设初值问题

$$(E):\quad y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x-x_0|<a$ 内可以展成 $(x-x_0)$ 的收敛的幂级数，则 (E) 的解 $y=y(x)$ 在 $|x-x_0|<a$ 内存在且唯一，而且可展成 $(x-x_0)$ 的收敛的幂级数.

3. 叙述并证明解关于参数的解析性定理.

§2.　幂级数解法

从本节开始，我们限于讨论二阶齐次线性微分方程

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0, \tag{2.1}$$

其中 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 都在区间 $|x-x_0|<r$ 内解析（下文实际考虑的都是多项式的情形）. 如果它们有公因子 $(x-x_0)$，那么在方程(2.1)中我们不妨先把它约去. 如果 $A(x_0)\neq 0$，那么在 x_0 点附近 $A(x)\neq 0$，因此方程(2.1)可以写成如下形式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2.2}$$

其中系数函数

$$p(x)=B(x)/A(x),\quad q(x)=C(x)/A(x)$$

在 x_0 点附近是解析的. 我们称这样的 x_0 点为微分方程(2.1)的**常点**. 如果 $A(x_0)=0$，则 $B(x_0)$ 和 $C(x_0)$ 中至少有一个不等于零[因为它们的公因子 $(x-x_0)$ 已约去]. 因此，$p(x)$ 和 $q(x)$ 中至少有一个在 x_0 点是不连续的（此时方程(2.2)在 x_0 点的邻域内可能没有解析解）. 这样的 x_0 点称为微分方程(2.2)或(2.1)的**奇点**.

本节先考虑常点的情形. 利用微分方程组的柯西定理，直接可得下面的结果（见上节的习题1和习题2）.

定理2　设微分方程(2.2)中的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x-x_0|<r$ 可以展成 $(x-x_0)$ 的收敛的幂级数，则(2.2)在区间

$|x-x_0|<r$ 内有收敛的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n,$$

其中 C_0 和 C_1 是两个任意常数(它们可通过在 x_0 点的初值条件来决定,即 $C_0=y_0$ 和 $C_1=y_0'$),而 $C_n(n\geqslant 2)$ 可以从 C_0 和 C_1 出发依次由递推公式确定. ▍

【例 1】 用幂级数解法求解 Airy 方程

$$y''=xy,\quad(-\infty<x<\infty).\tag{2.3}$$

解 由定理 1,我们可设方程(2.3)有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad(-\infty<x<\infty).\tag{2.4}$$

对(2.4)进行逐项微分,并调整求和指标,得出

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

把上面的 y 和 y'' 代入方程(2.3),并调整 xy 的级数展开式中的求和指标(令 $a_{-1}=0$),得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

因此,由幂级数的唯一性,就得到下面的**递推公式**

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1},\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

亦即

$$2a_2=0,$$

$$3\cdot 2\ a_3=a_0,$$

$$4\cdot 3\ a_4=a_1,$$

$$5\cdot 4\ a_5=a_2,$$

$$6\cdot 5\ a_6=a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此不难推出

$$a_2 = a_5 = \cdots = a_{3n+2} = \cdots = 0;$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_6 = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \quad \cdots,$$

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \cdots;$$

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_7 = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \quad \cdots,$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \cdots.$$

所以，我们得到 Airy 方程(2.3) 的幂级数解为

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}\right]$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}\right].$$

容易直接验证，这个幂级数对任何 x 都是收敛的. 并且，它是方程(2.3) 的通解(a_0 和 a_1 为任意常数). ▌

【例 2】　求 Airy 方程(2.3) 在 $x = 1$ 处展开的幂级数解.

解　为此，把方程(2.3) 改写成

$$y'' = [1 + (x-1)]y, \tag{2.5}$$

并求它的形如

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \tag{2.6}$$

的解. 由(2.6)，我们有

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n. \tag{2.7}$$

把(2.6) 和(2.7) 代入(2.5)，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n.$$

由此利用幂级数展式的唯一性，得到递推公式

$$2a_2 = a_0,$$
$$3 \cdot 2\, a_3 = a_1 + a_0,$$
$$4 \cdot 3\, a_4 = a_2 + a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, \tag{2.8}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

如果给定 a_0 和 a_1，则由此递推公式得到

$$a_2 = \frac{a_0}{2},$$
$$a_3 = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6},$$
$$a_4 = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},$$
$$a_5 = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此，所求的幂级数解为

$$y = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right].$$

一般说来，当递推公式包含三个或更多的系数时[例如递推公式(2.8)]，要象例 1 那样明确地写出 a_n 的表达式是有困难的. ▎

【例 3】 求解勒让德方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{2.9}$$

其中 n 是常数.

解 易知 $x=0$ 是勒让德方程的一个常点. 由定理 2 知，当 $|x| < 1$ 时，方程有幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{2.10}$$

与例 1 的计算相类似，把(2.10) 代入方程(2.9)，可以推得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)C_{k+2}+(n+k+1)(n-k)C_k]x^k=0.$$

由此得到递推公式

$$(k+2)(k+1)C_{k+2}+(n+k+1)(n-k)C_k=0, \tag{2.11}$$

$(k=0,1,2,\cdots)$. 从而得出

$$C_{2m}=(-1)^m\cdot \frac{(n-2m+2)\cdots(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)}{(2m)!}C_0$$

和

$$C_{2m+1}=(-1)^m\cdot \frac{(n-2m+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2m)}{(2m+1)!}C_1,$$

$$(m=1,2,3,\cdots).$$

因此，我们得到勒让德方程的幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}[C_{2k}x^{2k}+C_{2k+1}x^{2k+1}]. \tag{2.12}$$

注意：$x=\pm 1$ 是方程(2.9)的两个奇点. 可以猜测，在(2.12)中，当 $x\to\pm 1$ 时，y 的变化是比较复杂的. 当 n 是非负整数时，我们将在下一节比较详细地讨论勒让德方程的幂级数解(2.12). ▌

上述对二阶齐次线性微分方程的幂级数解法可以自然地推广到 n 阶的情形，并且对非齐次线性微分方程也是适用的. 这里不要求读者具备复变函数论的基础，因而我们把讨论只局限在实变量的范围内. 但是，整个讨论其实都可以在复变量的范围内进行. 实际上，作为十九世纪常微分方程主要成就之一的解析理论，就是研究复变域中的微分方程，它利用复变函数论的方法来研究微分方程解的解析性质. 对此有兴趣的读者可以参考有关微分方程解析理论的著作，例如文献[4]和[6].

习 题 7-2

1. 求出下列微分方程在 $x = x_0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解，并写出相应的递推公式：

(1) $y'' - xy' - y = 0$, $x_0 = 0$;

(2) $y'' - xy' - y = 0$, $x_0 = 1$;

(3) $(1-x)y'' + y = 0$, $x_0 = 0$.

2. 对于下列初值问题求出 $y''(x_0)$、$y^{(3)}(x_0)$ 和 $y^{(4)}(x_0)$，从而写出相应初值问题的解在 x_0 点的泰勒级数的前几项：

(1) $y'' + xy' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

(2) $y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

3. 求解 Hermite 方程：

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

其中 λ 是常数.

4. 求微分方程

$$y'' + (\sin x)y = 0$$

在 $x = 0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解.

* § 3. 勒让德多项式

在 §2 的例 3 中，我们得到了勒让德方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{3.1}$$

的幂级数解

$$y = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x), \quad (-1 < x < 1) \tag{3.2}$$

其中 C_0 和 C_1 是任意常数，而

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

和

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n+3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

显然，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关的，而且当 n（设 $n \geq 0$）是偶数时，

$y_1(x)=P_n(x)$ 是一个 n 次多项式；而当 n 是奇数时，$y_2(x)=P_n(x)$ 是一个 n 次多项式. 通过直接验证，可知：除了一个常数因子外，我们可以把上述 $P_n(x)$ 写成如下统一的形式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \tag{3.3}$$

其中$\left[\frac{n}{2}\right]$表示$\frac{n}{2}$的整数部分（$n=0,1,2,\cdots$）.

这样，对任意的非负整数 n，由公式(3.3)所表达的 n 次多项式 $P_n(x)$ 是相应勒让德方程(3.1)的解. 它们叫作**勒让德多项式**.

由(3.3)式容易算出

$$P_0(x)=1,$$
$$P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$
$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

等等；而且显然有

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),$$

即 $P_{2m}(x)$ 是偶函数，而 $P_{2m+1}(x)$ 是奇函数（$m=0,1,2,\cdots$）. 在数学物理方法中有时要考虑一个函数关于勒让德多项式系

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\cdots \tag{3.4}$$

的展开问题. 为此，我们需要讨论勒让德多项式的一些性质.

性质 1　$P_n(x)$ 满足罗德里格斯(Rodrigues)公式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n; \tag{3.5}$$

从而容易得出

$$P_n(1)=1 \quad 和 \quad P_n(-1)=(-1)^n. \tag{3.6}$$

证明 利用二项式公式，并注意当 $[\frac{n}{2}]\leqslant k\leqslant n$ 时，有 $\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}=0$，因此我们有

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k n!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

再应用(3.3)式，就可得到公式(3.5). ▌

性质 2 勒让德函数系(3.4)是正交的，即

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0, & 当\ m\neq n;\\ \sigma_n>0, & 当\ m=n,\end{cases} \tag{3.7}$$

并且可以算出 $\sigma_n=\frac{2}{2n+1}$.

证明 不妨设 $n\leqslant m$. 令

$$u_n=(x^2-1)^n, \quad u_n^{(s)}=\frac{d^s}{dx^s}u_n,$$

则罗德里格斯公式(3.5)成为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}u_n^{(n)}.$$

因此，先后利用 m 次分部积分法并应用(3.6)式可得

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}u_n^{(n)}u_m^{(m)}dx$$

$$=\frac{-1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}u_n^{(n+1)}u_m^{(m-1)}dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}u_n^{(n+m)}u_m dx,$$

当 $n<m$ 时，$u_n^{(n+m)}=\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n=0$，因此(3.7)的第一种

情形得证；当 $n=m$ 时，由上式进一步计算可得

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx=\frac{(-1)^n}{(2^nn!)^2}\int_{-1}^{1}u_n{}^{(2n)}u_ndx$$

$$=\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^nn!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ndx$$

$$=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}\cdot 2^{2n+1}$$

$$=\frac{2}{2n+1},$$

因此(3.7)的第二种情形也得证. ▌

利用性质2，仿照傅里叶(Fourier)级数的理论，我们可以讨论函数 $f(x)$ 关于勒让德正交多项式系(3.4)的展开问题.

设 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上可积，则可作 $f(x)$ 关于 $P_n(x)$ 的**广义傅里叶级数**

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x),\tag{3.8}$$

其中广义傅里叶系数

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$$

广义傅里叶级数不一定收敛；即使它是收敛的，也不一定收敛到 $f(x)$. 我们在这里不加证明地引用与傅里叶级数的收敛性相平行的结果：如果函数 $(1-x^2)^{-1/4}f(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上绝对可积，并且下列条件之一成立：

(1) 狄里克莱(Dirichlet)条件：$f(x)$ 在 x_0 附近的一个区间上分段单调，并且在这区间上不连续点的个数至多是一个有限数；

(2) 狄尼(Dini)条件：对于某一常数 $h>0$，积分

$$\int_0^h\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}dt$$

存在；

(3) Hölder 条件：$f(x)$ 在 x_0 点连续，并且对于充分小的 $t>0$，

不等式

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leqslant Lt^{\alpha}$$

成立，其中 L 与 α 都是正的常数，且 $\alpha \leqslant 1$（当 $\alpha = 1$ 时就是李卜西兹条件）；

那么(3.8)右侧的广义傅里叶级数在 $x = x_0(-1 < x_0 < 1)$ 收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$；特别，如果 $f(x)$ 还在 x_0 点连续，则它的广义傅里叶级数就收敛到 $f(x_0)$.

习 题 7-3

* 1. 令函数

$$G(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2},$$

则 $G(x,t)$ 关于 t 展开的幂级数为

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

其中 $P_n(x)$ 是勒让德多项式(函数 $G(x,t)$ 称为勒让德多项式的母函数).

2. 利用上题中的 $G(x,t)$ 所满足的恒等式

$$(1 - 2xt + t^2)\frac{\partial G}{\partial t} = (x - t)G,$$

证明递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (n \geqslant 1).$$

* 3. 利用刘维尔公式(见第六章 §1)求出勒让德方程的另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的解 $Q_n(x)$，并证明当 $x \to 1-0$ 时 $|Q_n(x)| \to +\infty$.

§4. 广义幂级数解法

在 §2 中，我们已经证明，微分方程

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{4.1}$$

在常点 x_0 的邻域内存在幂级数解. 这里 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 是 x 的多项式[或在 x_0 附近可以展成 $(x-x_0)$ 的幂级数]，而且它们没有公因式 $(x-x_0)$. 在本节中，我们将进一步证明，微分方程(4.1)在

某一类奇点（称为正则奇点）的邻域内存在广义幂级数解. 现在设 x_0 是方程(4.1)的一个奇点，则 $A(x)$ 含有因子 $(x-x_0)^k (k \geq 1)$，而 $B(x_0) \neq 0$ 或 $C(x_0) \neq 0$. 一般而言，方程(4.1)在奇点附近不再有幂级数形式的通解，而且在奇点 x_0 处的初值问题可能是无解的. 让我们先看几个例子.

【例 1】　讨论微分方程

$$x^2 y'' - 2y = 0 \tag{4.2}$$

在奇点 $x=0$ 附近解的性态.

解　微分方程(4.2)是欧拉方程（见习题 6-3，第 7 题），所以容易求出它的通解为

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}, \quad (x \neq 0).$$

因此，方程(4.2)当 $x \to 0$ 时的有界解只可能是

$$y = Cx^2, \quad (C \text{ 是任意常数})$$

它们都满足 $y(0) = y'(0) = 0$. 这说明方程(4.2)不可能有满足 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的解. 因而方程(4.2)在奇点 $x=0$ 处的初值问题不一定有解. 此外，方程(4.2)的解 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无界的，从而它在 $x=0$ 点不能展成幂级数. ▌

【例 2】　讨论微分方程

$$x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{4.3}$$

在奇点 $x=0$ 附近存在幂级数解的可能性.

解　设方程(4.3)有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad (C_0 \neq 0),$$

代入方程，推出递推公式

$$C_{n+1} = (n+1)C_n, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

由此得到方程(4.3)的形式幂级数解为

$$y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n,$$

易知此幂级数是发散的(只要 $x \neq 0$).

此例表明,不能在奇点用普通幂级数解法求解方程(4.3). ▌

【例 3】 求解微分方程

$$x^2y'' - xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0. \tag{4.4}$$

解 方程(4.4)也以 $x = 0$ 为唯一的奇点. 令

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}u,$$

则 $u = u(x)$ 满足方程

$$u'' + u = 0,$$

它有两个线性无关的解

$$u_1 = \cos x \quad 和 \quad u_2 = \sin x.$$

因此,我们得到方程(4.4)的两个线性无关的解

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}}, \tag{4.5}$$

和

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

注意,(4.5)和(4.6)都不是普通意义下的幂级数,它们属于以下形式的**广义幂级数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+\rho} \quad (C_0 \neq 0),$$

其中常数 ρ 叫作**指标**. 例如,广义幂级数(4.5)对应于 $x_0 = 0$ 和 $\rho = -\frac{1}{2}$;而广义幂级数(4.6)对应于 $x_0 = 0$ 和 $\rho = \frac{1}{2}$. ▌

下面的定理给出了微分方程(4.1)在奇点附近存在广义幂级数解的一个充分条件.

定理 3 设微分方程(4.1)以 x_0 为**正则奇点**,即方程(4.1)可以改写成如下形式

$$(x - x_0)^2 P(x)y'' + (x - x_0)Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{4.7}$$

其中 $P(x_0)\neq 0$，$P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 是多项式（或它们在 x_0 点附近可展成 $(x-x_0)$ 的幂级数），则微分方程（4.1）有收敛的广义幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(x-x_0)^{k+\rho}\quad (C_0\neq 0),\tag{4.8}$$

其中指标 ρ 和系数 $C_k(k\geqslant 1)$ 可以用代入法确定.

证明 在 x_0 点的某一邻域 $|x-x_0|<r$ 内，我们可以把方程（4.7）改写为

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^ky'+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^ky=0.$$

假设它有（形式）广义幂级数解（4.8），则代入上述方程可得

$$(x-x_0)^{\rho}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)C_k(x-x_0)^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)C_k(x-x_0)^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}C_k(x-x_0)^k\right\}=0,$$

消去因式 $(x-x_0)^{\rho}$，然后可利用幂级数的唯一性，比较系数得到如下的递推公式

$$\begin{cases}C_0f_0(\rho)=0,\\ C_1f_0(\rho+1)+C_0f_1(\rho)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_kf_0(\rho+k)+C_{k-1}f_1(\rho+k-1)+\cdots+C_0f_k(\rho)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}\tag{4.9}$$

其中

$$\begin{cases}f_0(\rho)\equiv\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0,\\ f_j(\rho)\equiv a_j\rho+b_j,\quad (j\geqslant 1).\end{cases}$$

由于 $C_0\neq 0$，所以由（4.9）的第一式得到**指标方程**

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0.$$

设 ρ_1 和 ρ_2 是指标方程的两个根（称为**指标根**）. 当两个指标根都为

实数时，记 $\rho_1 \geqslant \rho_2$；否则它们为一对共轭复根，这时记 ρ_1 为其中任一根. 这样，我们有

$$\begin{cases} f_0(\rho_1) = 0, \\ f_0(\rho_1 + j) \neq 0, \quad (j \geqslant 1). \end{cases}$$

因此，对应于指标根 $\rho = \rho_1$，可以从(4.9)的第二式开始，依次确定系数 $C_1, C_2, \cdots, C_k, \cdots$，从而得到方程(4.7)的一个(形式)广义幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^{k+\rho_1}, \quad (C_0 \neq 0). \tag{4.10}$$

我们来证明，(4.10)在 x_0 附近是收敛的[可能不包含 x_0 点，这是因为当 $x = x_0$ 时 $(x - x_0)^{\rho_1}$ 可能无意义，例如 $\rho_1 = -1$].

设 $\rho_1 - \rho_2 = m$，则 $\mathrm{Re}(m) \geqslant 0$. 因为级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad 和 \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

都在区间 $|x - x_0| < r$ 内收敛，所以对于取定的 $r_1 (0 < r_1 < r)$，存在 $M > 0$(不妨设 $M \geqslant 1$)，使得

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{r_1{}^k}, \quad |b_k| \leqslant \frac{M}{r_1{}^k}, \quad |\rho_1 a_k + b_k| \leqslant \frac{M}{r_1{}^k}, \tag{4.11}$$

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$. 由此我们可以得到

$$|C_k| \leqslant \left(\frac{M}{r_1}\right)^k. \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{4.12}$$

事实上，由于 $f_0(\rho_1) = 0$ 以及 $\rho_1 + \rho_2 = 1 - a_0$ 和 $\rho_1 - \rho_2 = m$，我们有

$$f_0(\rho_1 + k) = k(k + m), \tag{4.13}$$

再利用(4.11)推出

$$|C_1| = \frac{|\rho_1 a_1 + b_1|}{|f_0(\rho_1 + 1)|} \leqslant \frac{M}{r_1 |m + 1|} \leqslant \frac{M}{r_1},$$

即(4.12)式对 $k = 1$ 成立. 现在设(4.12)对 $k = 1, 2, \cdots, s - 1$ 成立，则由递推公式(4.9)并利用(4.11)和(4.13)得出

$$|C_s| = \frac{\left|\sum_{j=1}^{s-1} C_j f_{s-j}(\rho_1 + j) + C_0 f_s(\rho_1)\right|}{s|s+m|} \quad (\text{取 } C_0 = 1)$$

$$\leqslant \frac{\sum_{j=1}^{s-1} |C_j| \cdot |(\rho_1 + j)a_{s-j} + b_{s-j}| + |\rho_1 a_s + b_s|}{s^2}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{j=0}^{s-1} |C_j| \left[|\rho_1 a_{s-j} + b_{s-j}| + |j a_{s-j}| \right]}{s^2}$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{2} s(s+1) \left(\frac{M}{r_1}\right)^s}{s^2} < \left(\frac{M}{r_1}\right)^s.$$

这就证明了(4.12)式对所有的正整数 k 都成立. 因此, 对于任意 $0 < r_2 < r_1$, 所得广义幂级数(4.10)在 $0 < |x - x_0| \leqslant \frac{r_2}{M}$ 内是收敛的.

最后还应指出,当指标根 ρ_1 是复数时,我们得到的(4.10)是一个复的广义幂级数解. 由于方程(4.7)是实系数的,所以用分离实部和虚部的方法,原则上可以从(4.10)得出两个实的级数解(参见第六章 §2 的附注 2). ▌

【附注】 当 ρ_1 和 ρ_2 都是实数并且 $\rho_1 - \rho_2 = m$ 为正整数或零时,一般不能从 ρ_2 出发再得到一个与(4.10)不同的广义幂级数解(这时 $f_0(\rho_2 + m) = f_0(\rho_1) = 0$,因此由递推公式(4.9)确定系数 C_m 时将遇到困难). 但我们可以利用刘维尔公式[见第六章(3.11)式],从与 ρ_1 相应的广义幂级数解(4.10)出发,得到另一个与其线性无关的解.

【例 4】 求解**贝塞尔方程**

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \tag{4.14}$$

其中常数 $n \geqslant 0$.

解 方程(4.14)以 $x = 0$ 为正则奇点. 由定理 3,它有广义幂

级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(x-x_0)^{k+\rho},\quad (C_0\neq 0),$$

其中系数 $C_k(k\geqslant 1)$ 和指标 ρ 待定. 把这个级数代入方程(4.14),我们就推得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\rho+n+k)(\rho-n+k)C_k+C_{k-2}]x^{k+\rho}=0,$$

其中约定 $C_{-1}=C_{-2}=0$. 由此得出递推公式

$$(\rho+n+k)(\rho-n+k)C_k+C_{k-2}=0,\quad (k=0,1,2,\cdots).\tag{4.15}$$

由于已设 $C_0\neq 0$,且 $C_{-1}=C_{-2}=0$,所以由上面的第一式($k=0$)推出指标方程

$$(\rho+n)(\rho-n)=0.$$

由此得到两个指标根 $\rho_1=n$ 和 $\rho_2=-n$.

对应于 $\rho=\rho_1=n$,递推公式(4.15)成为

$$(2n+k)kC_k+C_{k-2}=0,\quad (k=1,2,\cdots),\tag{4.16}$$

其中 C_k 的系数 $(2n+k)k\neq 0$,因此可以依次确定 C_k. 具体地说,在(4.16)中取 $k=1$,得

$$(2n+1)C_1=0,$$

从而得到 $C_1=0$,并进而推出

$$C_3=C_5=\cdots=C_{2k+1}=\cdots=0;$$

再在(4.16)中取 $k=2,4,6,\cdots$,则可依次得到

$$C_2=\frac{-1}{2^2(n+1)}C_0,$$

$$C_4=\frac{1}{2^4(n+1)(n+2)2!}C_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)k!}C_0,$$

··

利用 Γ 函数的记号和公式

$$\Gamma(n+k+1)=(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\Gamma(n+1),$$

$$\Gamma(k+1)=k!,$$

并取

$$C_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

我们就可以把上面 C_{2k} 的表达式改写为

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\frac{1}{2^{2k+n}}.$$

这样，对应于指标根 $\rho_1=n$，我们得到贝塞尔方程(4.14)的一个广义幂级数解

$$y=J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{4.17}$$

容易看出，广义幂级数(4.17)对任何 x 都是收敛的，它叫作**第一类贝塞尔函数**.

对应于指标根 $\rho=\rho_2=-n,(n>0)$，递推公式(4.15)成为

$$k(k-2n)C_k+C_{k-2}=0,\quad (k=1,2,\cdots). \tag{4.18}$$

对此要区分两种情形进行讨论：

（一）　$2n$ 不等于任何整数

这时在(4.18)中 C_k 的系数 $k(k-2n)\neq 0$. 类似于上面的讨论，只要取

$$C_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$

则可得出贝塞尔方程的另一个广义幂级数解

$$y=J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \tag{4.19}$$

它叫作**第二类贝塞尔函数**. 注意,当 $x \to 0$ 时, $J_{-n}(x)$ 是无界的.

(二) $2n$ 等于某个整数 N

此时在(4.18)中 C_N 的系数 $N(N-2n)=0$. 因此由(4.18)来确定 C_N 就有困难. 此时我们再区分两种情况进行讨论:

1) $2n$ 等于一个奇数 $2s+1$,即 n 为半整数 $s+\frac{1}{2}$. 这时由(4.18)可知,当 k 为偶数时, C_k 的系数 $k(k-2n)\neq 0$. 因此,与情形(一)一样可确定 C_k. 而当 k 为奇数时,若 $k<2s+1$,则 $C_k(k\geqslant 1)$ 的系数 $k(k-2n)$ 仍不等于零,因此有

$$C_1 = C_3 = \cdots = C_{2s-1} = 0;$$

若 $k\geqslant 2s+1$,则由(4.18)得知 C_{2s+1} 的系数为零,而且有

$$(2s+1)(-2n+2s+1)C_{2s+1}=0,$$

$$(2s+3)(-2n+2s+3)C_{2s+3}+C_{2s+1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此,只要令 $C_{2s+1}=0$,则仍有 $C_{2s+3}=C_{2s+5}=\cdots=0$. 所以,当 n 为半整数时,对应于 $\rho_2=-n$,我们仍可得到一个广义幂级数解 $y=J_{-n}(x)$[它的表达式同(4.19)].

2) $2n$ 等于一个偶数,即 n 为整数. 这时可由(4.18)推出

$$C_2\neq 0,\ C_4\neq 0,\ \cdots,\ C_{2n-2}\neq 0,$$

以及

$$2n(2n-2n)C_{2n}+C_{2n-2}=0, \quad 从而 \quad C_{2n-2}=0.$$

这是一个矛盾. 因此,对应于 $\rho_2=-n$ 不可能从递推公式(4.18)求出方程(4.14)的广义幂级数解.

此时为了求出与 $J_n(x)$ 线性无关的另一个解,对于这个整数 $n\geqslant 0$,我们取参数 $\alpha\neq n$,但 α 充分接近 n,则 $J_\alpha(x)$ 和 $J_{-\alpha}(x)$ 都有意义,而且函数

$$y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}, \quad (\sin\alpha\pi\neq 0)$$

是贝塞尔方程(4.14)当 $n=\alpha$ 时的一个解,并且它在 $x=0$ 的邻域

内是无界的. 令

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} y_\alpha(x),$$

即

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}. \tag{4.20}$$

可以证明，$y = Y_n(x)$ 是贝塞尔方程(4.14)的解，且与第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$ 线性无关. 它叫作**诺依曼**(Neumann)**函数**或(相应于整数 n 的)**第二类贝塞尔函数**. ▍

对贝塞尔方程的求解已经完成，我们将在下节中对贝塞尔函数作较详细的讨论.

习　题　7-4

1. 试判别 $x = -1, 0, 1$ 是下列微分方程的什么点(常点、正则奇点或非正则奇点)？

(1)　$xy'' + (1-x)y' + xy = 0$;

(2)　$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$;

(3)　$2x^4(1-x^2)y'' + 2xy' + 3x^2y = 0$;

(4)　$x^2(1-x^2)y'' + \frac{2}{x}y' + 4y = 0$;

(5)　$y'' + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 y' + 3(1+x)^2 y = 0$.

2. 用广义幂级数求解下列微分方程：

(1)　$2xy'' + y' + xy = 0$;

(2)　$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$;

(3)　$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$;

(4)　$xy'' + y = 0$;

(5)　$xy'' + y' - y = 0$.

3. 设**超几何方程**

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)]y' - \alpha\beta y = 0,$$

其中 α, β, γ 是常数.

(1)　证明 $x = 0$ 是一个正则奇点，相应的指标根为

$$\rho_1 = 0 \quad 和 \quad \rho_2 = 1 - \gamma;$$

(2)　证明 $x = 1$ 也是一个正则奇点，相应的指标根为

$$\rho_1 = 0 \quad 和 \quad \rho_2 = \gamma - \alpha - \beta;$$

(3)　设 $1 - \gamma$ 不是正整数，则超几何方程在 $x = 0$ 的邻域内有一个幂级数解为

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 2!}x^2 + \cdots$$

(**超几何级数**). 试问它的收敛半径是什么？

(4)　设 $1 - \gamma$ 不是整数，则第二个解是

$$y_2 = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma) \cdot 1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma) \cdot 2!}x^2 + \cdots\right].$$

* § 5.　贝塞尔函数

在上一节中，我们求出了贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{5.1}$$

的广义幂级数解(其中常数 $n \geqslant 0$)，并且用它定义了两个重要的特殊函数——第一类贝塞尔函数 $y = J_n(x)$[见(4.17)式]和第二类贝塞尔函数 $y = J_{-n}(x)$[当 n 不是整数，见(4.19)]或 $y = Y_n(x)$[当 n 是整数，见(4.20)；$Y_n(x)$ 又名诺依曼函数]. 由于在实用上主要是 n 为整数的情况，所以我们在下面都假设 n 为非负整数. 通常称 $J_n(x)$ 为 n **阶贝塞尔函数**；而称 $Y_n(x)$ 为 n **阶诺依曼函数**. 本节主要讨论有关这两个函数的某些性质.

性质 1　当 $x \to \infty$ 时，$J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 有如下**渐近式**：

$$J_n(x) = \frac{A_n}{\sqrt{x}}[\sin(x + \alpha_n) + o(1)] \tag{5.2}$$

和

$$Y_n(x) = \frac{B_n}{\sqrt{x}}[\cos(x + \beta_n) + o(1)], \tag{5.3}$$

其中 $o(1)$ 表示一个无穷小量，而 A_n, B_n, α_n 和 β_n 都是只与 n 有关的常数，且 $A_n > 0, B_n > 0$.

证明　令

$$J_n(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0), \tag{5.4}$$

则代入贝塞尔方程(5.1)后推出 $u(x)$ 所满足的方程为

$$u''(x) + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u(x) = 0. \tag{5.5}$$

因为 $J_n(x)$ 是方程(5.1)的非零解，所以 $u(x)$ 是二阶线性微分方程(5.5)的非零解，从而 $u(x)$ 和 $u'(x)$ 不同时为零(见习题 6-3 第 4 题)，即

$$r(x) = \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2} > 0.$$

因此，我们可以把 $u(x)$ 和 $u'(x)$ 表达成极坐标的形式

$$\begin{cases} u(x) = r(x)\sin\theta(x), \\ u'(x) = r(x)\cos\theta(x). \end{cases} \tag{5.6}$$

代入(5.5)可以得出关于 $r(x)$ 和 $\theta(x)$ 的微分方程

$$\begin{cases} r'(x) = \dfrac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} r(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x), \\ \theta'(x) = 1 - \dfrac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\sin^2\theta(x). \end{cases} \tag{5.7}$$

令 $\theta(x) = x + \varphi(x)$，则(5.7)的第二个方程成为

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\sin^2(x + \varphi(x)),$$

取积分可得

$$\varphi(x) - \varphi(1) = \int_1^x \frac{\frac{1}{4} - n^2}{t^2}\sin^2(t + \varphi(t))dt.$$

上式右则的积分当 $x\to\infty$ 时是收敛的，因此极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=a_n$ 存在. 从而得到渐近式

$$\theta(x)=x+a_n+o(1). \tag{5.8}$$

再由(5.7)的第一个方程可得

$$r(x)=r(1)e^{\int_1^x\psi_n(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t)dt},$$

其中 $\psi_n(t)=\dfrac{n^2-\dfrac{1}{4}}{t^2}$. 因为 $|\sin\theta(t)\cos\theta(t)|\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以在上式指数中的积分当 $x\to\infty$ 时是收敛的，从而极限

$$\lim_{x\to\infty}r(x)=A_n=r(1)e^{\int_1^\infty\psi_n(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t)dt}>0$$

存在. 因此，$r(x)$ 的渐近式为

$$r(x)=A_n+o(1). \tag{5.9}$$

把(5.8)和(5.9)代入(5.6)，我们得到

$$u(x)=A_n\sin(x+a_n)+o(1)$$

和

$$u'(x)=A_n\cos(x+a_n)+o(1).$$

从而由(5.4)推出渐近式(5.2)成立. 此外，再利用上面两式还可得出

$$J_n'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u(x)}{x^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}[u'(x)+o(1)],$$

从而得到 $J_n'(x)$ 的渐近式

$$J_n'(x)=\frac{A_n}{\sqrt{x}}[\cos(x+a_n)+o(1)].$$

它可以看作是从渐近式(5.2)直接求导数而来的；或者说，可以对渐近式(5.2)求导数.

同样可证渐近式(5.3)成立，并且对它也可以求导数. ∎

从性质1可见，$J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 都有无穷多个零点[而且，它们的零点是相互交错的(见第九章 §1的定理1)]. 另外，由 $J_n(x)$ 的表达式可知

$$J_0(0)=1,\quad J_n(0)=0\quad(\text{当 } n\geqslant 1);$$

并可证明

$$\lim_{x\to 0+} Y_n(x)=-\infty.$$

由此可见，$J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 是线性无关的．下面的图 7-1 和图 7-2 分别表示了 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 当 $n=0$ 和 1 时的大致图形．

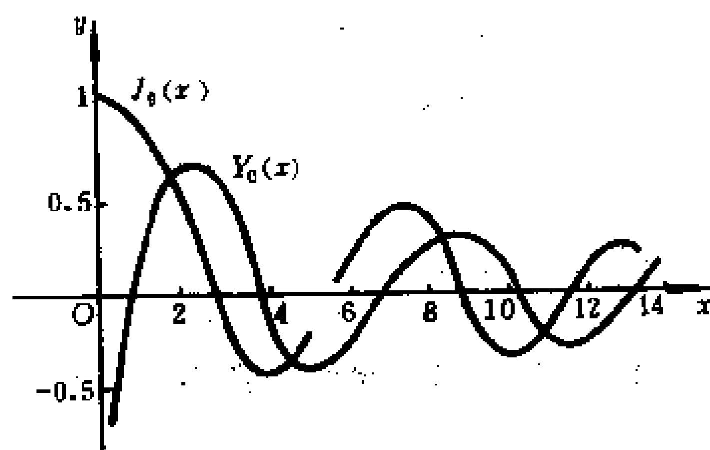


图 7-1

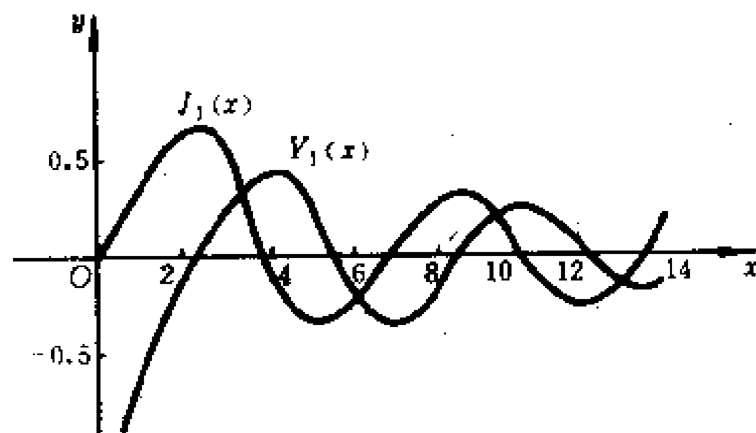


图 7-2

我们已经知道 $J_n(x)$ 有无穷多个零点，并且它们都是简单的（否则将推出 $J_n(x)$ 为零解）．设这些零点依次排列为

$$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<\cdots(\to\infty).$$

(注意,它们与 n 有关.)

在实际应用中,有时要在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上考虑函数系

$$J_n(\beta_1 t),\ J_n(\beta_2 t),\ \cdots,\ J_n(\beta_k t),\ \cdots \tag{5.10}$$

我们有下面的

性质 2 函数系(5.10)在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上是一个以 t 为权的**正交系**,即

$$\int_0^1 tJ_n(\beta_j t)J_n(\beta_k t)dt=\begin{cases}0, & 当\ j\neq k;\\ \tau_{n,k}>0, & 当\ j=k.\end{cases} \tag{5.11}$$

并且,可以算出 $\tau_{n,k}=\frac{1}{2}[J_n'(\beta_k)]^2$.

证明 令

$$u=J_n(at),\quad v=J_n(bt),$$

并以 · 表示对 t 求导数,则由贝塞尔方程(5.1)推出

$$t^2\ddot{u}+t\dot{u}+(a^2t^2-n^2)u=0$$

和

$$t^2\ddot{v}+t\dot{v}+(b^2t^2-n^2)v=0.$$

由上面两式容易得出

$$t^2(v\ddot{u}-u\ddot{v})+t(v\dot{u}-u\dot{v})+t^2(a^2-b^2)uv=0,$$

消去因子 t,可把上式改写为

$$\frac{d}{dt}[t(v\dot{u}-u\dot{v})]+t(a^2-b^2)uv=0.$$

积分上式,并注意 $\dot{u}(0)$ 和 $\dot{v}(0)$ 是有界的,得到

$$(a^2-b^2)\int_0^1 tuvdt=u(1)\dot{v}(1)-v(1)\dot{u}(1). \tag{5.12}$$

由于

$$u(1)=J_n(a),\quad \dot{u}(1)=aJ_n'(a),$$
$$v(1)=J_n(b),\quad \dot{v}(1)=bJ_n'(b),$$

所以在(5.12)中取 $a=\beta_j$ 和 $b=\beta_k(j\neq k)$,并注意 β_j 和 β_k 都是 $J_n(x)$ 的零点,就可得出(5.11)中的第一部分. 然后,在(5.12)中

取 $b=\beta_k$ 和 $a\neq\beta_k$，则有

$$\int_0^1 tJ_n(at)J_n(\beta_k t)dt=\frac{\beta_k}{a^2-\beta_k^2}J_n(a)J_n'(\beta_k).$$

在上式中令 $a\to\beta_k$，并在右端应用洛必达法则，就可得到

$$\int_0^1 t[J_n(\beta_k t)]^2dt=\frac{1}{2}[J_n'(\beta_k)]^2.$$

因为 β_k 是 $J_n(x)$ 的简单零点，所以上式右端是一个正数. 这就证明了(5.11)中的第二部分. ▌

与勒让德正交多项式系相仿，我们也可以讨论函数 $f(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上关于贝塞尔正交函数系(5.10)的展开问题.

设函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上可积，则可考虑它关于贝塞尔正交函数系(5.10)的如下展开

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_n(\beta_k x),\tag{5.13}$$

其中广义傅里叶系数

$$a_k=\frac{2}{[J_n'(\beta_k)]^2}\int_0^1 tf(t)J_n(\beta_k t)dt.$$

可以证明，如果 $\sqrt{x}\,f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上绝对可积，并且在 §3 末所列的条件之一成立，则(5.13)右侧的广义傅里叶级数在 $x=x_0$ 点 $(0<x_0<1)$ 收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$；特别，如果 $f(x)$ 还在 x_0 点连续，则它的广义傅里叶级数就收敛到 $f(x_0)$.

习　题　7-5

1. 试证：

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x).$$

2. 证明半整数阶的贝塞尔函数为

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\quad\text{(并作图)}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(dx^2)^n} \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(dx^2)^n} \frac{\cos x}{x},$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

*3. 用贝塞尔函数表达微分方程

$$y'' + xy = 0$$

的通解.

第八章　定性理论与分支理论初步

由法国数学家庞卡莱(Poincaré，1854—1912)在十九世纪八十年代所开创的微分方程定性理论，不借助于对微分方程的求解，而是从微分方程本身的一些特点来推断其解的性质(例如周期性、稳定性等)，因而它是研究非线性微分方程的一个有效的手段，自本世纪以来已成为常微分方程发展的主流.

与庞卡莱同时，俄国数学家李雅普诺夫(Ляпунов，1857—1918)对微分方程解的稳定性所作的深入研究，是定性理论的又一个奠基性工作.

近年来，人们不仅关心微分方程的某一个解在初值或参数扰动下的稳定性(即李雅普诺夫稳定性)，而且关心在一定范围内解族的拓扑结构在微分方程的扰动下的稳定性(即结构稳定性)，以及这种稳定性遭到破坏时所出现的分支(bifurcation)现象和浑沌(chaos)现象. 电子计算机的广泛应用和日新月异的进展为研究这些现象提供了有力的新工具，并且使得对微分方程的定量研究又有了可能. 然而，作为任何一种定量计算的基础，对解族的定性分析仍是不可替代的一步.

鉴于微分方程定性理论的应用已深入到许多自然学科和社会学科的领域，我们似有必要在本书中对它的一些基本概念和基本方法作一个初步的介绍. 有意涉足这一领域的读者可参考文献[5]、[8]、[9]、[11]、[17]—[19]、[21]、[23]—[25]等.

§1.　动力系统，相空间与轨线

假设一个运动质点 M 在时刻 t 的空间坐标为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

并且已知它在 x 点的运动速度为 $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \cdots, v_n(x))$，它只与空间坐标 x 有关. 则我们推得质点 M 的运动方程为

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(x), \tag{1.1}$$

它是一个自治微分方程(见第五章的 § 1). 如果函数 $\mathbf{v}(x)$ 满足微分方程解的存在和唯一性定理的条件，则对于任何初值条件

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

方程(1.1) 存在唯一的满足初值条件(1.2) 的解

$$x = \varphi(t, t_0, x_0), \tag{1.3}$$

它描述了质点 M 在 t_0 时刻经过 x_0 点的运动.

我们称 x 取值的空间 R^n 为**相空间**，而称 (t, x) 取值的空间 $R^1 \times R^n$ 为**增广相空间**. 按照微分方程的几何解释，方程(1.1) 在增广相空间中定义了一个线素场，而解(1.3) 在增广相空间中的图象是一条通过点 (t_0, x_0) 与线素场吻合的光滑曲线(积分曲线). 现在我们从运动的观点给出另一种几何解释：方程(1.1) 在相空间中的每一点 x，给定了一个速度向量

$$\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \cdots, v_n(x)), \tag{1.4}$$

因而它在相空间中定义了一个**速度场**(或称**向量场**)；而解的表达式(1.3) 则是相空间中与速度场(1.4) 吻合的一条光滑曲线(称为**轨线**)的参数方程，其中时间 t 为参数，且参数 t_0 对应于轨线上的点 x_0. 随着时间 t 的演变，质点在相空间中沿轨线运动，通常用箭头在轨线上标明相应于时间 t 增大时的运动方向. 容易看出，相轨线是增广相空间中的积分曲线沿 t 轴向相空间的投影，它是质点 M 运动的轨迹，因此有明显的几何意义. 由于在一般情形下得不出解(1.3) 的明显表达式，所以我们面对的任务是：从向量场(1.4) 的特性出发，去获取轨线的几何特征，或者更进一步，去弄清轨线族的拓扑结构图(称为**相图**). 因此，微分方程的定性理论又称作**几何理论**.

如果 x_0 是速度场(1.4) 的零点，即



$$\boldsymbol{v}(x_0) = \mathbf{0},$$

则显然方程(1.1)有一个定常解 $x = x_0$. 换句话说，点 $\{x_0\}$ 就是一条轨线. 这时我们称点 x_0 为方程(1.1)的一个**平衡点**，它表示了运动的一种平衡态. 今后我们会看到，在平衡点附近的轨线可能出现各种奇怪的分布，而且当 $t \to \infty$(或 $-\infty$)时，其它轨线有可能趋向(或远离)平衡点. 通常，把方程(1.1)的平衡点叫作**奇点**.

如果解(1.3)是一个非定常的周期运动，即存在 $T > 0$，使得

$$\boldsymbol{\varphi}(t + T; t_0, \boldsymbol{x}_0) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0),$$

则它在相空间中的轨线是一条闭曲线，亦即**闭轨**. 随着 $t \to \infty$，质点 M 在闭轨上作周而复始的运动.

【例 1】 设质点 $M(x,y)$ 在 xOy 平面上运动，已知它在 (x,y) 点的速度 $\boldsymbol{v}(x,y)$ 具有如下的水平与垂直分量：

$$v_x = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad v_y = x + y(x^2 + y^2 - 1),$$

则质点的运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \tag{1.5}$$

应用极坐标，令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则可以把方程(1.5)转化为

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(r^2 - 1), \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$

然后由此积分得

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 e^{2t}}}, \quad \theta = t + C_2.$$

设 $r(0) = r_0$，$\theta(0) = \theta_0$，及相应地 $x(0) = x_0$，$y(0) = y_0$，则 $C_1 = \dfrac{r_0^2 - 1}{r_0^2}$. 因此，当 (x_0, y_0) 点位于单位圆周 Γ 之内时，$C_1 < 0$；当

(x_0, y_0) 点位于单位圆周 Γ 之外时，$C_1 > 0$；而当 (x_0, y_0) 点位于单位圆周 Γ 之上时，$C_1 = 0$. 由此不难得出，依初值 (x_0, y_0) 的不同，系统(1.5)的轨线有如下四种不同的类型：

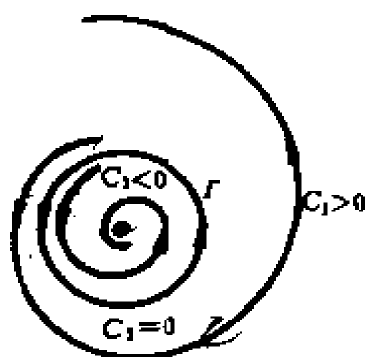


图 8-1

(1) 当 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 时，轨线就是奇点(0,0). 此时，(0,0)是系统(1.5)的唯一平衡点.

(2) 当 (x_0, y_0) 点在单位圆周 Γ 之上时，相应的轨线就是闭轨 Γ，它以逆时针方向为正向.

(3) 当 (x_0, y_0) 点在 Γ 之内并且不同于点(0,0)时，相应的轨线是 Γ 内的非闭曲线. 当 $t \to +\infty$ 时，它逆时针盘旋趋向于平衡点(0,0)；而当 $t \to -\infty$ 时，它顺时针盘旋趋于闭轨 Γ.

(4) 当 (x_0, y_0) 点在 Γ 之外时，相应的轨线是在 Γ 外部的非闭曲线，而且当 $t \to -\infty$ 时，它顺时针盘旋趋于 Γ.

图 8-1 是系统(1.5)的相图，而图 8-2 则显示了解的两种不同的几何解释 —— 积分曲线和相轨线之间的联系.

现在，我们要着重指出：任何一个自治微分方程都具有(1.1)的形式，而且只要右端函数满足解的存在和唯一性条件，就可以对它作出如上的动力学解释（不管它的自变量 t 是否代表时间），并可沿袭相空间、轨线、平衡点（奇点）和闭轨等概念. 在这个意义下，我们就把(1.1)称为一个**动力系统**.

下面是动力系统的几个基本性质.

1° **积分曲线的平移不变性**：系统(1.1)的积分曲线在增广相空间中沿 t 轴任意平移后还是(1.1)的积分曲线.

事实上，设 $x = \varphi(t)$ 是系统(1.1)的一个解，则由方程的自治性可以直接验证，对任意的常数 C，$x = \varphi(t + C)$ 也是(1.1)的解.

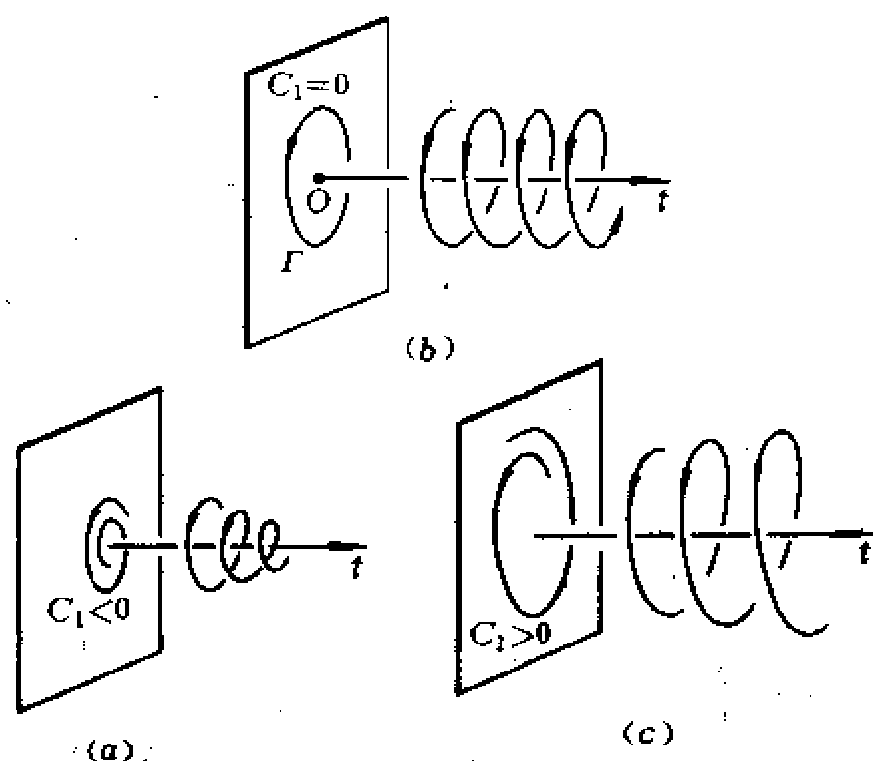


图 8-2　(a)(x_0,y_0) 在 Γ 内　(b)$(x_0,y_0)\in\Gamma$　(c)(x_0,y_0) 在 Γ 外

2°　**轨线的唯一性**：系统(1.1)过相空间中的任一点只有一条轨线通过.

事实上，假设在相空间的 x_0 点附近有两条不同的轨线段 l_1 和 l_2 都通过 x_0 点. 则在增广相空间中至少存在两条不同的积分曲线段 Γ_1 和 Γ_2（它们有可能属于同一条积分曲线），使得它们在相空间中的投影分别是 l_1 和 l_2（见图 8-3，这里不妨设 $t_1<t_2$）. 现在把 Γ_1 所在的积分曲线沿 t 轴向右平移 t_2-t_1，则由性质 1° 知道，平移后得到的 $\tilde{\Gamma}_1$ 仍是系统(1.1)的积分曲线，并且它与 Γ_2 至少有一个公共点. 因此，利用解的唯一性，$\tilde{\Gamma}_1$ 和 Γ_2 应完全重合，从而它们在相空间中有相同的投影. 另一方面，Γ_1 与 $\tilde{\Gamma}_1$ 在相空间显然也有相同的

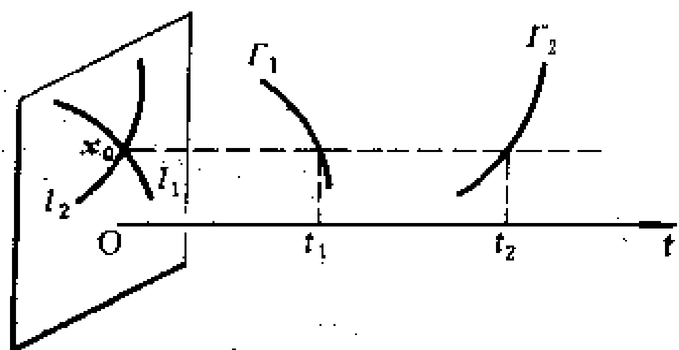


图 8-3

投影. 这蕴含 Γ_1 和 Γ_2 在相空间中的 x_0 点附近有相同的投影，而这与上面的假设相矛盾.

性质 1° 和性质 2° 说明，每条轨线都是沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线的投影，而且只是这族积分曲线的投影.

此外，由性质 1° 还可知道，系统(1.1)的解(1.3)的一个平移 $\varphi(t-t_0,0,x_0)$ 也是(1.1)的解，并且容易看出它与(1.3)一样满足相同的初值条件(1.2)，从而由解的唯一性它们应该恒等，即

$$\varphi(t-t_0,0,x_0)\equiv\varphi(t,t_0,x_0).$$

因此，在(1.1)的解族中我们只须考虑相应于初始时刻 $t_0=0$ 的解，并简记为

$$\varphi(t,x_0):=\varphi(t,0,x_0).$$

3° **群的性质**：系统(1.1)的解 $\varphi(t,x_0)$ 满足关系式

$$\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t_2+t_1,x_0). \tag{1.6}$$

此式的含意是：在相空间中，如果从 x_0 出发的运动沿轨线经过时间 t_1 到达 $x_1=\varphi(t_1,x_0)$，再经过时间 t_2 到达 $x_2=\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))$，那么从 x_0 出发的运动沿轨线经过时间 t_1+t_2 也到达 x_2.

事实上，由性质 1°，$\varphi(t+t_1,x_0)$ 是系统(1.1)的解，而且易知

它与解$\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))$在$t=0$时的初值都等于$\varphi(t_1,x_0)$. 因此,由解的唯一性得知它们应恒等: $\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))\equiv\varphi(t+t_1,x_0)$. 特别,取$t=t_2$,就得到(1.6)式.

【附注 1】　假设对于任意的$x_0\in G\subset R^n$,系统(1.1)的解$\varphi(t,x_0)$都在$-\infty<t<\infty$上存在(不难证明:如果(1.1)不具有此性质,那么系统

$$\frac{dx}{dt}=\frac{v(x)}{\sqrt{1+|v(x)|^2}}$$

具有此性质,而后者与前者有相同的轨线),则对任意固定的t,解$\varphi(t,x_0)$给出了一个从G到R^n的变换φ_t,它把x_0变到$\varphi(t,x_0)$. 因此,$\Sigma:=\{\varphi_t \mid t\in R\}$形成了一个单参数的变换集合,它具有性质:

Ⅰ　φ_0是恒同变换;

Ⅱ　$\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$; 亦即,对一切$x_0\in G$, $\varphi_s\big(\varphi_t(x_0)\big)=\varphi_{s+t}(x_0)$;

Ⅲ　$\varphi_t(x_0)$对t和x_0均连续.

注意,性质Ⅱ是前面性质3°的一个等价写法. 从性质Ⅱ不仅看出集合Σ中元素对复合运算的封闭性,而且显示了对复合运算的结合律和交换律;这使得Σ在变换的复合运算下作成一个加法群(现在得以明了,我们为什么把性质3°叫作群的性质). 性质Ⅰ说明,φ_0是群中的单位元,而从性质Ⅰ和Ⅱ不难得出,φ_{-t}是φ_t的逆元. 这种具有性质Ⅰ—Ⅲ的单参数连续变换群称为一个**抽象动力系统**(或**拓扑动力系统**);如果再要求φ_t是可微的,则称它为**微分动力系统**. 这是近二、三十年来发展很快的一个研究方向.

【附注 2】　对于**非自治**系统

$$\frac{dx}{dt}=v(t,x),\tag{1.7}$$

上面的性质1°—3°不再成立. 但我们可以把它视为高一维空间上的自治系统. 事实上,令

$$y=\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix},\quad w(y)=\begin{pmatrix}v(t,x)\\1\end{pmatrix},$$

则系统(1.7)等价于 $n+1$ 维相空间中的自治系统

$$\frac{dy}{dt}=w(y).$$

当然，维数的升高一般会使讨论的难度增大.

§2. 解的稳定性

2.1 李雅普诺夫稳定性的概念

在第五章的 §3 中，我们讨论了微分方程的解对初值的连续依赖性，并指出了这个问题的实际意义. 那里的讨论方法只适用于自变量在有限闭区间内取值的情况. 如果自变量扩展到无穷区间上，那么解对初值不一定有连续依赖性. 这就产生了在李雅普诺夫意义下的稳定性问题. 我们先来看两个实际例子.

首先考察上一节中的例1. 从图8-1可以看出，系统(1.5)的平衡点(0,0)有一个重要特征：从它附近(单位圆周 Γ 内部)的任一点出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋向于(0,0)点. 换句话说，初值点的小的偏差不影响解的最终趋势. 因此，我们把系统(1.1)的平衡点(0,0)(或相应的解 $x=0,y=0$)称为渐近稳定的.

其次，我们再考察第五章的 §1 中无阻尼单摆的振动问题. 那里得到的振动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2\sin x=0,$$

或写成如下的等价形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-a^2\sin x.\end{cases}\tag{2.1}$$

这是一个二维的动力系统，第五章的图 5-5 是它的相图．容易看出，虽然(0,0)点和$(\pi,0)$点都是系统(2.1)的平衡点，但联系到周围轨线的分布就会发现，它们具有迥然不同的特征：从(0,0)点附近出发的轨线可以停留在(0,0)点的任意小邻域内，只要相应的初值点足够靠近(0,0)；而$(\pi,0)$点附近的轨线(除两条外)都要跑出$(\pi,0)$点的某个邻域之外，无论相应的初值点多么靠近$(\pi,0)$．这两种情形的力学含意是：只要摆球偏离下垂平衡位置(初值)足够小，而且初始角速度足够小，它就将在下垂平衡位置附近作小振幅的周期摆动；但当摆球处于上举平衡位置时，无论有多么小的偏离(除二个特例外)，它将开始进动或作大振幅的周期摆动(依初始偏离位置上的初始角速度的大小而定)．针对上述不同的特征，我们把平衡点(0,0)(或定常解 $x=0, y=0$)称作是稳定的(但不是渐近稳定的)，而把平衡点$(\pi,0)$(或定常解 $x=\pi, y=0$)称作是不稳定的．

现在，我们考虑一般的方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{2.2}$$

其中函数 $f(t,x)$ 对 $x\in G\subset R^n$ 和 $t\in(-\infty,\infty)$ 连续，并对 x 满足李氏条件．又假设(2.2)有一个解 $x=\varphi(t)$ 在 $t_0\leqslant t<\infty$ 有定义．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得只要

$$|x_0-\varphi(t_0)|<\delta, \tag{2.3}$$

方程(2.2)以 $x(t_0)=x_0$ 为初值的解 $x(t,t_0,x_0)$ 就也在 $t\geqslant t_0$ 有定义，并且满足

$$|x(t,t_0,x_0)-\varphi(t)|<\varepsilon,\qquad (\text{对所有的 } t\geqslant t_0), \tag{2.4}$$

则我们称方程(2.2)的解 $x=\varphi(t)$ 是(在李雅普诺夫意义下)**稳定的**．假设 $x=\varphi(t)$ 是稳定的，而且存在 $\delta_1\,(0<\delta_1\leqslant\delta)$，使得只要

$$|x_0-\varphi(t_0)|<\delta_1, \tag{2.5}$$

就有

$$\lim_{t\to+\infty}\left|x(t,t_0,x_0)-\varphi(t)\right|=0, \tag{2.6}$$

则称解 $x=\varphi(t)$ 是(在李雅普诺夫意义下)**渐近稳定的**. 如果解 $x=\varphi(t)$ 不是稳定的,则称它是**不稳定的**.

此外,如果把条件(2.5)改为:当 x_0 在区域 D 内时,就有(2.6)成立(这里假设 $\varphi(t_0)\in D$),则称 D 为解 $x=\varphi(t)$ 的**渐近稳定域**(或**吸引域**). 如果吸引域是全空间,则称解 $x=\varphi(t)$ 是**全局渐近稳定的**. 例如上节例1中的定常解 $x=0, y=0$ 的吸引域是单位圆内整个开区域,它不是全局渐近稳定的.

【附注1】 如果把上面定义中的 $t\to\infty$ 改为 $t\to-\infty$(相应地,要假设解在 $t\leqslant t_0$ 时的存在性),则可得出负向渐近稳定、负向稳定和负向不稳定的相应定义. 一般情况下,我们考虑正向的稳定性,而且省略"正向"两字.

本节的中心内容是:对于给定的方程(2.2),设法(不通过求通解)判断某个已知特解的稳定性. 我们将介绍两种方法:线性近似方法,和李雅普诺夫第二方法.

为了简化讨论,我们在下文中只考虑方程(2.2)的零解 $x=0$ 的稳定性(即假设 $f(t,0)\equiv 0$). 事实上,在变换 $y=x-\varphi(t)$ 之下,总可以把上述一般问题化成这种特殊的情形.

2.2 按线性近似判断稳定性

我们把方程(2.2)右端的函数 $f(t,x)$[注意,$f(t,0)\equiv 0$]展开成 x 的线性部分 $A(t)x$ 和非线性部分 $N(t,x)$(x 的高次项)之和,即考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+N(t,x), \tag{2.7}$$

其中 $A(t)$ 是一个 n 阶的矩阵函数,对 $t\geqslant t_0$ 连续;而函数 $N(t,x)$ 对 t 和 x 在区域

$$G:\quad t\geqslant t_0,\quad |x|\leqslant M \tag{2.8}$$

上连续,对 x 满足李氏条件,并且还满足 $N(t,0)\equiv 0\ (t\geqslant t_0)$ 和

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{|N(t,x)|}{|x|}=0,\quad (\text{对 } t\geqslant t_0 \text{ 一致成立}). \tag{2.9}$$

由于我们考虑的是(2.7)的零解 $x=0$ 的稳定性,因而只考察当 $|x_0|$ 较小时以 (t_0,x_0) 为初值的解.可以预料:在一定的条件下,方程(2.7)的零解的稳定性与其线性化方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{2.10}$$

的零解之稳定性密切相关.下面,我们先考察如何判定线性方程(2.10)的零解的稳定性,然后再来研究在何种条件下非线性方程(2.7)的零解的稳定性可由它的线性化方程(2.10)所决定.

设 $\Phi(t)$ 是齐次线性微分方程(2.10)的一个基本解矩阵,而且满足 $\Phi(t_0)=E$.

引理 1　方程(2.10)的零解是稳定的,当且仅当存在正常数 $K>0$,使得

$$|\Phi(t)|<K,\quad 当\ t\geqslant t_0 \tag{2.11}$$

(即:(2.10)的一切解都是有界的).

证明　先设(2.11)成立.则对任意的 $\varepsilon>0$,只要 $|x_0|<\frac{\varepsilon}{K}$,以 (t_0,x_0) 为初值的解 $x(t,t_0,x_0)$ 就满足

$$|x(t,t_0,x_0)|=|\Phi(t)x_0|<\varepsilon, \tag{2.12}$$

即(2.10)的零解是稳定的.

反之,设方程(2.10)的零解是稳定的.则由稳定性定义易知,对取定的常数 $\varepsilon>0$,存在常数 $\sigma>0$,使得当 $|x_0|\leqslant\sigma$, $t\geqslant t_0$ 时,(2.12)成立.特别,取 x_0,使 $|x_0|=\sigma$,而且先后取 $x_0=\sigma e_i$,其中 e_i 表示第 i 个分量为1的单位列向量,$i=1,2,\cdots,n$.则 $\Phi(t)$ 的第 i 列 $\Phi_i(t)=\Phi(t)e_i$ 满足

$$|\Phi_i(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma},\quad (t\geqslant t_0).$$

因此,只要取 $K=\frac{n\varepsilon}{\sigma}$ 就得到(2.11)式. ▌

引理 2　方程(2.10)的零解是渐近稳定的,当且仅当

$$\lim_{t\to\infty}|\Phi(t)|=0.$$

证明 注意方程(2.10)的解 $x(t,t_0,x_0)=\Phi(t)x_0$，则引理的结论自明. ▌

当 $A(t)$ 是常矩阵 A 时，利用第六章的 §2 中有关常系数齐次线性微分方程组基解矩阵的结果，和上面的两个引理，容易得到下面的结论.

定理 1 设线性方程(2.10)中的矩阵 $A(t)$ 为常矩阵 A，则

1) 零解是渐近稳定的，当且仅当矩阵 A 的全部特征根都有负的实部；

2) 零解是稳定的，当且仅当矩阵 A 的全部特征根的实部是非正的，并且那些实部为零的特征根所对应的约当块都是一阶的；

3) 零解是不稳定的，当且仅当矩阵 A 的特征根中至少有一个实部为正；或者至少有一个实部为零，且它所对应的约当块是高于一阶的. ▌

一般而言，非线性微分方程(2.7)的零解可能与其线性化方程(2.10)的零解有不同的稳定性. 但李雅普诺夫第一个指出，当 $A(t)=A$ 为常矩阵，且 A 的特征根全部具有负实部或至少有一个具有正实部时，方程(2.7)的零解的稳定性则由它的线性化方程(2.10)所决定. 具体地说，我们有下面两个定理.

定理 2 设方程(2.7)中的 $A(t)=A$ 为常矩阵，而且 A 的全部特征根都具有负的实部，则(2.7)的零解是渐近稳定的.

定理 3 设方程(2.7)中的 $A(t)=A$ 为常矩阵，而且 A 的特征根中至少有一个具有正的实部，则(2.7)的零解是不稳定的.

下面我们只给出定理 2 的证明，并顺便介绍有名的格龙瓦尔(Gronwall)不等式. 定理 3 的证明可参考文献[2]的第十三章.

引理 3 (推广的格龙瓦尔引理) 设实值的和非负的函数 $a(t)$ 和 $u(t)$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上是连续的. 若对 $t\in[t_0,t_1]$，有

$$u(t)\leqslant C+\int_{t_0}^{t}[a(s)u(s)+K]ds, \tag{2.13}$$

其中 C 和 K 是非负的常数，则当 $t\in[t_0,t_1]$ 时，我们有

$$u(t) \leqslant [C + K(t - t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}. \qquad (2.14)$$

[当 $a(t) = a$ 为常数且 $K = 0$ 时，就是格龙瓦尔原先的不等式.]

证明　由(2.13)可得

$$\frac{a(t)u(t) + K}{C + \int_{t_0}^{t}[a(s)u(s) + K]ds} \leqslant a(t) + \frac{K}{C + \int_{t_0}^{t}[a(s)u(s) + K]ds}$$

$$\leqslant a(t) + \frac{K}{C + K(t - t_0)},$$

把上式两端从 t_0 到 t 积分，就得到

$$\ln\left\{C + \int_{t_0}^{t}[a(s)u(s) + K]ds\right\} - \ln C$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \ln[C + K(t - t_0)] - \ln C,$$

由此推出

$$C + \int_{t_0}^{t}[a(s)u(s) + K]ds \leqslant [C + K(t - t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

然后再把(2.13)式与上式相连接，即得(2.14)式. ∎

定理 2 的证明　取 $\boldsymbol{x}_0$，$|\boldsymbol{x}_0| < M$，则方程(2.7)满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的右行解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 存在. 先假设此解的右侧最大存在区间为$[t_0, t_1)$，我们最终将证明 $t_1 = +\infty$. 在下面的各式中，都假定 $t_0 \leqslant t < t_1$.

由常数变易公式(见第六章的 §1)，我们有

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}N(s, \boldsymbol{\varphi}(s))ds. \qquad (2.15)$$

由于矩阵 A 的全部特征根都具有负的实部，因此存在正常数 K 和 ρ，使得

$$\left|e^{(t-t_0)A}\right| \leqslant K\,e^{-\rho(t-t_0)}. \qquad (2.16)$$

由(2.15)和(2.16)可得

$$|\boldsymbol{\varphi}(t)| \leqslant K|\boldsymbol{x}_0|e^{-\rho(t-t_0)} + K\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-s)}|N(s, \boldsymbol{\varphi}(s))|ds.$$

$$(2.17)$$

另一方面，利用条件(2.9)可知，存在常数 a，$0<a<\frac{\rho}{2K}$，使得当 $(t,x)\in G$ 时[必要时可缩小(2.8)式中的 M]，有

$$|N(t,x)|\leqslant a|x|. \tag{2.18}$$

把(2.18)代入(2.17)，并以 $e^{\rho(t-t_0)}$ 乘所得不等式两侧，可以推出

$$|\varphi(t)|e^{\rho(t-t_0)}\leqslant K|x_0|+Ka\int_{t_0}^{t}e^{\rho(s-t_0)}|\varphi(s)|ds.$$

再利用引理 3 可得

$$|\varphi(t)|e^{\rho(t-t_0)}\leqslant K|x_0|e^{Ka(t-t_0)}.$$

以 $e^{-\rho(t-t_0)}$ 乘上式两侧，并注意 $a<\frac{\rho}{2K}$，我们有

$$|\varphi(t)|\leqslant K|x_0|e^{-(\rho-Ka)(t-t_0)}<K|x_0|e^{-\frac{\rho}{2}(t-t_0)}. \tag{2.19}$$

现在取正数 $\delta<\frac{M}{K}$，则只要 $|x_0|<\delta$，就可由(2.19)推出

$$|\varphi(t)|<K\delta<M,\quad (t_0\leqslant t<t_1).$$

因此，利用解的延伸定理(见第三章的§3)易知，必有 $t_1=+\infty$. 这样，解 $x=\varphi(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 都有定义，并且(2.19)式当 $t\geqslant t_0$ 时成立. 这就是说，方程(2.7)的零解是渐近稳定的. ▌

【附注 2】 不能用定理 2 和定理 3 判别的是一种所谓**临界情形**：矩阵 A 的特征根中没有实部为正的，但有实部为零的. 此时方程(2.7)的零解的稳定性不仅取决于它的线性部分，而且还依赖于它的更高阶项. 例如，当一个平面动力系统的线性部分矩阵有一对纯虚数的特征根时，它的零解可能出现渐近稳定、稳定和不稳定三种不同的类型(读者在本节的习题 5 中适当选取不同的函数 $f(x,y)$ 就可实现这一点). 对于临界情况的稳定性，可以用下段介绍的方法去判别. 有兴趣的读者还可以参考专著[9]中的第四章和第五章或[25].

2.3 李雅普诺夫第二方法

李雅普诺夫在他的巨著"运动稳定性的一般问题"中创立了

处理稳定性问题的两种方法：**第一方法**要利用微分方程的级数解，在他之后没有得到大的发展；而**第二方法**则巧妙地利用一个与微分方程相联系的所谓**李雅普诺夫函数**来直接判定解的稳定性，因此又称为**直接方法**.它在许多实际问题中得到了成功的应用.

为了介绍李雅普诺夫第二方法，我们先看几个例子.

【例 1】　再次考察 §1 的例 1 中的方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \tag{2.20}$$

我们已利用它的通解判断出平衡点(0,0)是渐近稳定的.现在我们可以不解方程，直接利用一个李雅普诺夫函数来推断这个结论.为此，令函数

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

则它显然满足下述两个条件.

条件 1　$V(0,0) = 0$；而 $V(x,y) > 0$，当 $(x,y) \neq (0,0)$.

如果以 $x(t)$，$y(t)$ 表示微分方程(2.20)的任一轨线的（参数）方程，并且记

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.20)} = \frac{dV(x(t),y(t))}{dt}$$

（它称为函数 V 通过微分方程(2.20)对 t 的全导数），则有

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.20)} &= \left.\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right|_{(2.20)} \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

因此，当 $0 < x^2 + y^2 < 1$ 时我们有

条件 2　$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(2.20)} < 0.$

根据条件 1 和条件 2，我们就可以断言平衡点(0,0)是渐近稳定的.

事实上，条件 1 蕴含了函数 $V(x,y)$ 的一个几何特性：对任意的

常数 $C>0$(且 C 足够小),$V(x,y)=C$ 在相平面上的图形是一条环绕原点的闭曲线 $\gamma(C)$. 并且当 $C_1\neq C_2$ 时,$\gamma(C_1)$ 与 $\gamma(C_2)$ 不相交;而当 $C\to 0$ 时,$\gamma(C)$ 收缩到(0,0)点(见图 8-4).

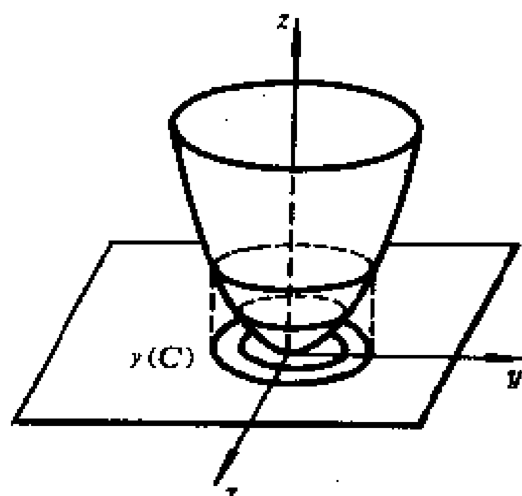


图 8-4

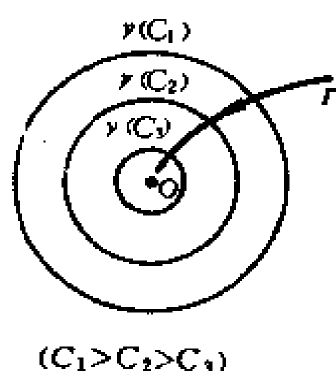


图 8-5

而条件 2 蕴含了在(0,0)点附近系统(2.20)的轨线 Γ 与上述 $\gamma(C)$ 的一种相互关系:沿着轨线 Γ 的正向(即沿着 t 增大的方向),$V(x,y)=C$ 的值严格地由大变小. 换句话说,随着 $t\to+\infty$,Γ 将由外向内穿入所有遇到的 $\gamma(C)(C>0)$,最终趋向(0,0)点(见图 8-5). 这就说明平衡点(0,0)是渐近稳定的. 注意,Γ 不可能环绕某一 $\gamma(C_0)$ 无限盘旋. 否则,$\gamma(C_0)$ 就是(2.20)的一条轨线,而这与条件 2 是矛盾的. ▌

【例 2】 重新考察单摆的方程(2.1),即

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-a^2\sin x,\end{cases}\tag{2.21}$$

其中常数 $a>0$. 我们用一个 V-函数来直接判断平衡点(0,0)的稳定性. 为此,令

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+a^2(1-\cos x),$$

则它在平衡点(0,0)附近显然满足条件1和

条件 2*　　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.21)}=0.$

条件2*表明，当 $0<C\ll1$ 时，闭曲线 $\gamma(C)$ 就是方程(2.21)的轨线. 再结合条件1可知，平衡点(0,0)是稳定的.

实际上，为了保证(0,0)的稳定性，可以把条件2*减弱为

条件 2**　　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.21)}\leqslant 0.$

这个条件的几何意义是：当正数 C 较小时，从 $\gamma(C)$ 上任一点 P_0 出发的轨线 Γ 当 $t\geqslant t_0$ 时停留在 $\gamma(C)$ 所围的区域内. 而条件1蕴含，只要 P_0 足够靠近原点，则过 P_0 的闭曲线 $\gamma(C)$ 就可位于原点的足够小邻域内. 因此，(0,0)是稳定的(见图8-6). ▌

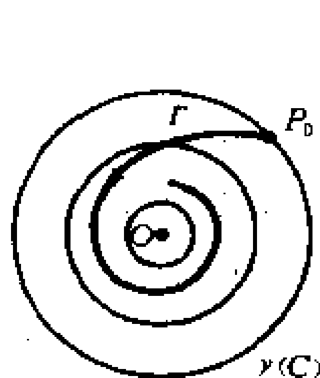


图 8-6

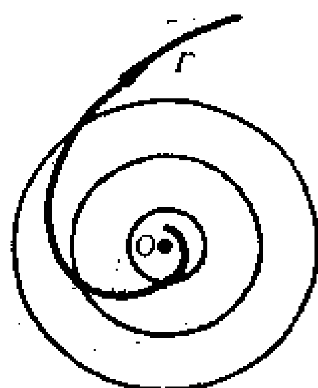


图 8-7

【例 3】　对于方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2),\end{cases}\tag{2.22}$$

令

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

则 $V(x,y)$ 显然满足条件 1 和

条件 3　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.22)}=(x^2+y^2)^2>0$，当 $(x,y)\neq(0,0)$.

这表明，沿着(2.22)的轨线 Γ 当 t 增大时 V 的值也随之严格地增大. 换句话说，从(0,0)任意近处出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时都将从 $\gamma(C)$ 的内部穿到外部，最终离开(0,0)(见图 8-7). 从而，(0,0)是不稳定的. ▌

现在，不难把例 1 — 例 3 中的思想方法提炼成一个一般的判别法则，这就是李雅普诺夫的第二方法. 我们把它陈述在下面，读者不难给出它的严格的分析证明(也可参见[**9**]，[**11**]或[**25**]). 为了简明起见，我们只考虑自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\tag{2.23}$$

其中自变量 $\boldsymbol{x}\in R^n$，而函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x}))$ 满足初值问题解的存在和唯一性条件.

假设存在标量函数 $V(\boldsymbol{x})$，它在区域 $|\boldsymbol{x}|\leqslant M$ 上有定义，并且有连续的偏导数. 先对 V 提出如下几组条件：

条件 Ⅰ　$V(\mathbf{0})=0$；$V(\boldsymbol{x})>0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$.

(此时，称 V 为**定正函数**.)

条件 Ⅱ　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n<0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$.

(即 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}$ 是**定负函数**.)

条件 Ⅱ*　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}\leqslant 0$.

(此时称 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}$ 为**常负函数**.)

条件 Ⅲ　$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}>0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$.

(即 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}$ 是定正函数.)

定理 4　(李雅普诺夫稳定性判据)

1) 若条件 Ⅰ 和条件 Ⅱ 成立，则微分方程(2.23)的零解是渐近稳定的；

2) 若条件 Ⅰ 和条件 Ⅱ* 成立，则微分方程(2.23)的零解是稳定的；

3) 若条件 Ⅰ 和条件 Ⅲ 成立，则微分方程(2.23)的零解是不稳定的. ▌

【附注 3】　不难看出，当条件 Ⅰ — Ⅲ 中的不等号全部反置时，定理 4 仍然成立.

注意，对于判定零解的不稳定性，在定理 4 的结论 3) 中所提的条件过于苛刻. 实际上，当条件 Ⅰ 和条件 Ⅲ 成立时，微分方程(2.23)的零解是负向渐近稳定的. 下面，我们介绍一个判定不稳定性而条件较弱的定理.

定理 5　(不稳定性判据)　对于方程(2.23)，若存在一个标量函数 $V(x)$ 和相空间内原点某邻域中的一个开子区域 $\mathscr{N}$，使得

(1) $V(x)$ 在 $\mathscr{N}$ 内连续可微；

(2) $\mathscr{N}$ 的一支边界 $\partial\mathscr{N}$ 通过原点，且 $V(x)|_{\partial\mathscr{N}} = 0$；

(3) 在 $\mathscr{N}$ 内 $V(x)$ 及 $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(2.23)}$ 均为正数，

则(2.23)的零解是不稳定的. ▌

图 8-8 是对这个定理的几何解释：可在 $\mathscr{N}$ 内取到任意接近原点的 x_0，使得沿着从 x_0 出发的轨线 Γ，当 t 增大时 $V(x)$ 的值严格增大，从而 Γ 将离开原点的某一邻域. 这说明零解是不稳定的. 注意，定理 4 中的结论 3) 是定理 5 的特殊情形：这时 $\mathscr{N}$ 是一个环域 $0 < x^2 + y^2 < r^2 (r > 0$ 足够

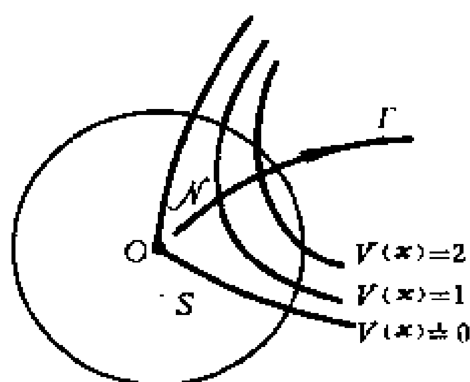


图 8-8

小），而它的一支边界 $\partial\mathcal{N}$ 蜕化为相平面的原点.

本节中的几何解释都是对 2 维相空间的情形作出的，但可毫无困难地推广到更高维的情形，只需以等位面 $V(x)=C$ 替代上面的等位线.

【例 4】　由于方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+xy, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-x^3 \end{cases} \tag{2.24}$$

的线性部分矩阵有一个正的特征根，所以由定理 3 可知，它的零解是不稳定的. 现在，我们应用定理 5 来直接判别.

事实上，取

$$V(x,y)=xy$$

和

$$\mathcal{N}=\{(x,y)\mid x>0,\quad y>0\},$$

则当 $0<x^2+y^2\ll 1$ 且 $(x,y)\in\mathcal{N}$ 时，有 $V>0$ 和

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.24)}=x^2+y^2+F_3>0,\quad 当\ 0<x^2+y^2\ll 1,$$

其中 F_3 表示关于 x 和 y 为三次或高于三次的项. 因此，定理 5 的条件全部满足，从而方程(2.24) 的零解是不稳定的. ∎

在结束本节之前还应指出，虽然用李雅普诺夫第二方法判断解的稳定性具有直接而简明的优点，但却没有一般的方法去具体寻找李雅普诺夫函数，尽管它的存在性在很多情形下是已经证明了的（这就是所谓李雅普诺夫稳定性定理的反问题）. 因此，对于给定的微分方程，如何构造李雅普诺夫函数，从而判断其解的稳定性，至今仍是一个吸引人的研究课题.

习　题　8-2

1. 证明：线性方程零解的渐近稳定性等价于它的全局渐近稳定性.
2. 设 x 与 t 都是标量，试求出方程

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x$$

的零解为稳定或渐近稳定的充要条件.

3. 对于极坐标下的方程

$$\dot{\theta} = 1, \quad \dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin \dfrac{1}{r}, & \text{当 } r > 0, \\ 0, & \text{当 } r = 0, \end{cases}$$

试作出原点附近的相图,并研究平衡点 $r = 0$ 的稳定性质.

4. 设二阶常系数线性方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

其中 A 是一个 2×2 的常矩阵. 记

$$\begin{cases} p = -\operatorname{tr} A, & \text{(与矩阵 } A \text{ 的迹反号)}, \\ q = \det A, & \text{(矩阵 } A \text{ 的行列式)}. \end{cases}$$

再设 $p^2 + q^2 \neq 0$,试证:

1) 当 $p > 0$ 且 $q > 0$ 时,零解是渐近稳定的;

2) 当 $p > 0$ 且 $q = 0$ 或 $p = 0$ 且 $q > 0$ 时,零解是稳定的,但不是渐近稳定的;

3) 在其它情形下,零解都是不稳定的.

5. 讨论二维方程

$$\dot{x} = y - xf(x,y), \quad \dot{y} = -x - yf(x,y)$$

的零解的稳定性,其中函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点附近是连续可微的.

6. 设 $x \in R$,函数 $g(x)$ 连续,且 $xg(x) > 0$ 当 $x \neq 0$. 试证方程

$$\ddot{x} + g(x) = 0$$

的零解是稳定的,但不是渐近稳定的.

7. 研究二维微分方程

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1 + x^2$$

的两个平衡点的稳定性.

8. 讨论下列方程零解的稳定性:

(1) $\dot{x} = -y - xy^2, \quad \dot{y} = x - x^4 y$;

(2) $\dot{x} = -y^3 - x^5, \quad \dot{y} = x^3 - y^5$;

(3) $\dot{x} = -x + 2x(x+y)^2, \quad \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x+y)^2$;

(4) $\dot{x} = 2x^2 y + y^3, \quad \dot{y} = -xy^2 + 2x^6$.

§3. 平面上的动力系统，奇点与极限环

从本节开始，我们限于讨论平面上的动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 在 (x,y) 平面上连续，并且满足进一步的条件，以保证初值问题的解唯一.

由于平面的某些特性，特别是由于约当定理在平面上成立(即：平面上的简单闭曲线 γ 把平面分成两部分，连接这两部分中任意点的连续路径必定与 γ 相交)，就使得在二维相空间中的轨线分布比较单纯：如果一条轨线既不是闭轨也不是奇点，那么在轨线上的任何一点都有一个小邻域，使得轨线在走出这邻域以后永不复还. 而在三维(或更高维)相空间中轨线的分布可以没有这种单纯的性质. 所以平面动力系统的理论也比较单纯和完善.

如果从(3.1)中消去 t，则得到方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}. \tag{3.2}$$

显然，系统(3.1)的奇点就是我们在第一章的 §2 中对形如(3.2)的方程所定义的奇异点；当方程(3.2)的积分曲线不含奇(异)点时，它就是系统(3.1)的一条轨线，而当方程(3.2)的积分曲线跨越奇(异)点时，则它被奇点所分割的每一个连通分支都是系统(3.2)的一条轨线. 不是奇点的点称为常点. 利用第五章的 §3 中对方程(3.2)在常点邻域内积分曲线的"局部拉直"可知，系统(3.1)在常点附近的轨线结构是平凡的，即它拓扑同胚于一个平行直线族. 这里拓扑同胚的含意是，存在一个1-1的连续变换 T，把(3.1)的轨线变成直线.

对于给定的系统(3.1)，我们的目标是获得它的相图(从而得

到解族的特性). 上面的分析表明,在研究相图的局部结构时,困难集中在奇点附近. 此外,容易明了,在研究相图的整体结构时,(除了奇点以外)闭轨将起重要的作用. 下面,我们就分别介绍平面系统(3.1)的奇点和闭轨.

3.1　初等奇点

我们先考察以(0,0)点为奇点的线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为常矩阵.

当矩阵 A 非退化(即 A 不以零为特征根)时,称(0,0)为系统(3.1)的**初等奇点**. 否则,称它为**高阶奇点**. 初等奇点都是孤立奇点,而线性高阶奇点都是非孤立的(见本节习题 1). 当加上高阶项之后,原来的高阶奇点也可以是孤立的,此时它常可视为两个或多个初等奇点的复合(见下节的 4.2 段,详见[23]). 本节只讨论初等奇点.

作线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (T \text{ 为可逆矩阵})$$

则系统(3.3)变为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

适当选取 T,可使 $T^{-1}AT$ 成为 A 的约当标准型. 这就容易在 (ξ,η) 平面上得到系统(3.4)的轨线结构. 然后,再经过 T^{-1}(即仿射变换)的作用,就可返回到 (x,y) 平面而得到系统(3.3)的轨线结构.

因此,我们不妨假定系统(3.3)中的矩阵 A 已是实的约当标准型. 即它具有下列形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 λ,μ 和 β 均不等于零. 下面分别就每一情况讨论奇点附近的轨线结构.

(Ⅰ)　$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$,　$(\lambda\mu\neq 0)$.

此时系统(3.3)成为

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad \frac{dy}{dt}=\mu y. \tag{3.5}$$

与(3.5)相联系,我们考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu}{\lambda}\frac{y}{x}. \tag{3.6}$$

它的解为

$$y=C|x|^{\mu/\lambda}\quad 和\quad x=0, \tag{3.7}$$

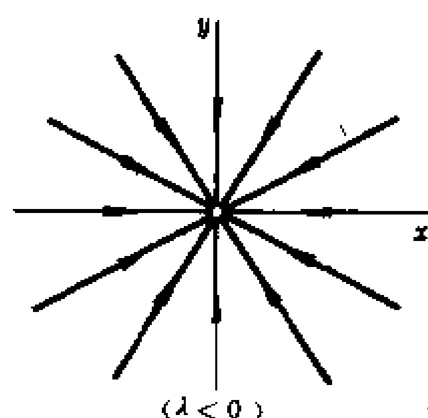
其中 C 为任意常数. 下面再区分三种情形:

1)　$\lambda=\mu$, 即矩阵 A 有两个相同的实特征根,且约当块都是一阶的.

这时方程(3.6)的积分曲线族(3.7)是过奇点(0,0)的直线束. 因此,束中每一条直线被奇点(0,0)所分割的两个射线都是系统(3.5)的轨线. 容易从(3.5)式看出:若 $\lambda<0$,则沿着每一条轨线当 $t\to+\infty$ 时运动 $(x(t),y(t))\to(0,0)$,故奇点(0,0)是渐近稳定的,我们得到相图 8-9;若 $\lambda>0$,则情形相反,即奇点(0,0)是不稳定的,见图 8-10. 在这两种情形下,我们把奇点(0,0)称为**星形结点(或临界结点)**.

2)　$\lambda\neq\mu$ 且 $\lambda\mu>0$, 即矩阵 A 有两个同号且不相等的实特征根.

这时曲线族(3.7)中除了 x 轴和 y 轴之外,都是以(0,0)为顶点的"抛物线",当 $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|>1$ 时,它们均与 x 轴相切,而当 $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|<1$ 时,它们均与 y 轴相切. 族(3.7)中的每一条曲线都被奇点(0,0)分割成系统(3.5)的两条轨线. 显然,当 λ 和 μ 取负值时,奇点(0,0)是渐近稳定的;而当 λ 和 μ 取正值时,奇点(0,0)是不稳定的. 注意



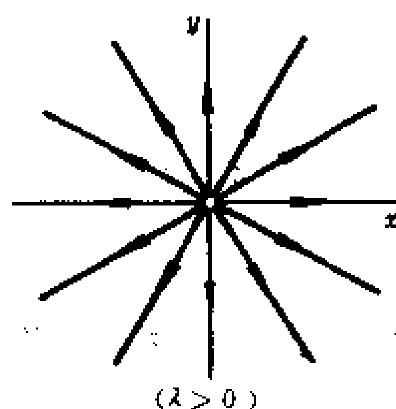
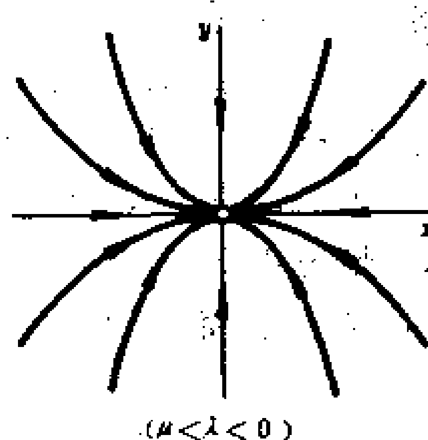


图 8-9 稳定的星形结点　　　　图 8-10 不稳定的星形结点

到所有的轨线都是沿着两个方向进入(或离开)奇点. 因此，称奇点(0,0)为**两向结点**(**或正常结点**)，见图 8-11 与图 8-12.



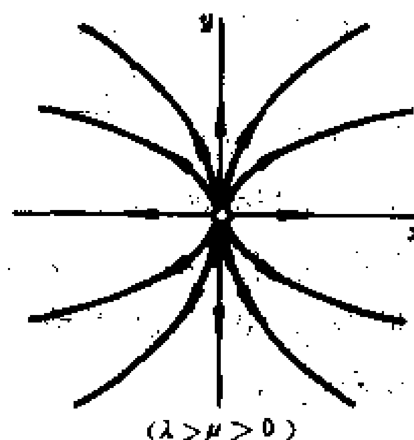


图 8-11 稳定的两向结点　　　　图 8-12 不稳定的两向结点

3)　$\lambda\mu<0$，即矩阵 A 有两个异号的实特征根.

这时曲线族(3.7)，除了直线 $x=0$ 和 $y=0$ 之外，是一个以它们为渐近线的"双曲线"族. 因此，系统(3.5)的轨线由正、负 x 轴，正、负 y 轴，以及上述"双曲线"族所组成. 沿着每一条"双曲线"形

轨线，当 $t\to+\infty$ 时运动 (x,y) 都最终远离 $(0,0)$ 点，故奇点 $(0,0)$ 是不稳定的. 它的相图见图 8-13，这种奇点 $(0,0)$ 称为**鞍点**.

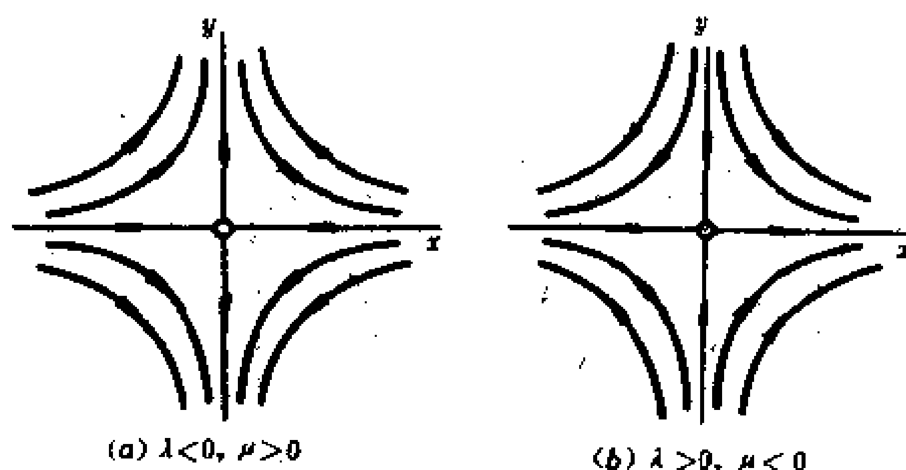


图 8-13 鞍点

(Ⅱ)　$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$(\lambda\neq 0)$，即矩阵 A 有二重实特征根，且相应的约当块是二阶的.

此时系统(3.3)成为

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad \frac{dy}{dt}=x+\lambda y. \tag{3.8}$$

与(3.8)相联系，考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{x}y,$$

它的解为

$$y=Cx+\frac{x}{\lambda}\ln|x| \quad 和 \quad x=0, \tag{3.9}$$

其中 C 为任意常数. 由(3.9)不难推出

$$\lim_{x\to 0}y=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to 0}\frac{dy}{dx}=\begin{cases}+\infty, & 当 \lambda<0;\\ -\infty, & 当 \lambda>0.\end{cases}$$

因此，曲线族(3.9)中的每一曲线(包括 y 轴)都在 $(0,0)$ 点与 y 轴

相切. 这时称(0,0)为**单向结点**(或**退化结点**). 图8-14和图8-15分别给出稳定与不稳定单向结点的相图.

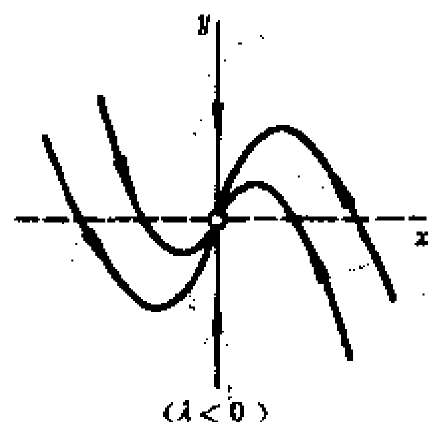


图8-14 稳定的单向结点

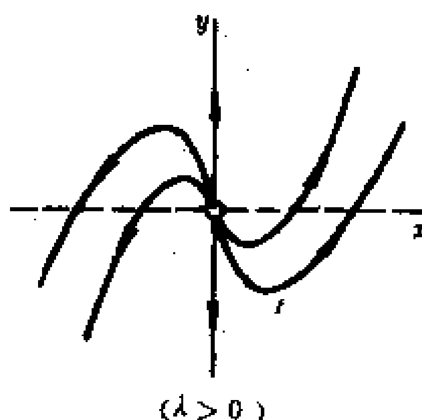


图8-15 不稳定的单向结点

(Ⅲ)　$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, $(\beta\neq 0)$, 即矩阵A有一对共轭的复特征根.

此时取极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则系统(3.3)化为

$$\frac{dr}{dt}=\alpha r,\quad \frac{d\theta}{dt}=\beta. \tag{3.10}$$

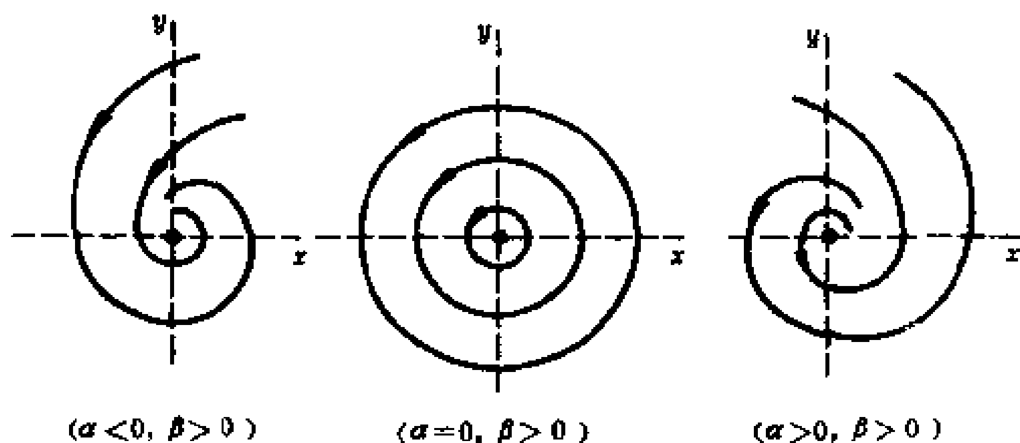
容易得出(3.10)的通解为

$$r=C\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\theta\right), \tag{3.11}$$

其中任意常数$C\geqslant 0$. 当$C>0$时,曲线族(3.11)中的曲线不通过奇点$r=0$,因此(3.11)就是系统(3.10)的轨线族. 由(3.10)的第二式易见,β的符号决定轨线的盘旋方向(奇点除外):$\beta>0$时沿逆时针方向;$\beta<0$时沿顺时针方向. 相图依α的不同符号分为三种:当$\alpha<0$时,(3.11)是螺线族,并且随着$t\to+\infty$,每一螺线都趋于奇点$r=0$,因而称这种奇点为**稳定焦点**(它是渐近稳定的);当$\alpha>0$时,(3.11)仍为螺线族,但奇点$r=0$成为负向渐近稳定

的，因而称作**不稳定焦点**；而当 $\alpha=0$ 时，(3.11) 成为同心圆族，因而奇点 $r=0$ 是稳定的（但不是渐近稳定的），它称为**中心点**.

下面的图 8-16，图 8-17 和图 8-18 分别显示了当 $\beta>0$ 时三种不同的相图.



$(\alpha<0,\ \beta>0)$　$(\alpha=0,\ \beta>0)$　$(\alpha>0,\ \beta>0)$

图 8-16 稳定焦点　图 8-17 中心点　图 8-18 不稳定焦点

总括上面的讨论，我们有如下结果.

定理 6（初等奇点类型的判定）　对于系统(3.3)，记

$$p=-\operatorname{tr}A=-(a+d)\quad 和\quad q=\det A=ad-bc,$$

则我们有

1) 当 $q<0$ 时，(0,0) 为鞍点；

2) 当 $q>0$ 且 $p^2>4q$ 时，(0,0) 为两向结点；

3) 当 $q>0$ 且 $p^2=4q$ 时，(0,0) 为单向结点或星形结点；

4) 当 $q>0$ 且 $0<p^2<4q$ 时，(0,0) 为焦点；

5) 当 $q>0$ 且 $p=0$ 时，(0,0) 为中心点.

此外，在情形 2) — 4) 中，奇点的稳定性由 p 的符号决定：当 $p>0$ 时奇点是稳定的，而当 $p<0$ 时则是不稳定的. ∎

图 8-19 概括地显示了定理 6 的结果：(p,q) 平面被正 q 轴、p 轴和抛物线 $p^2-4q=0$ 分割成 F_1、F_2、N_1、N_2 和 S 等五个区域，分别

对应于稳定、不稳定焦点，稳定、不稳定两向结点和鞍点；抛物线 $p^2-4q=0$ 被原点分割的两支 M_1 和 M_2 分别对应于稳定和不稳定的单向或星形结点；而正 q 轴 C 对应于中心点. 注意，p 轴 H 对应于高阶奇点.

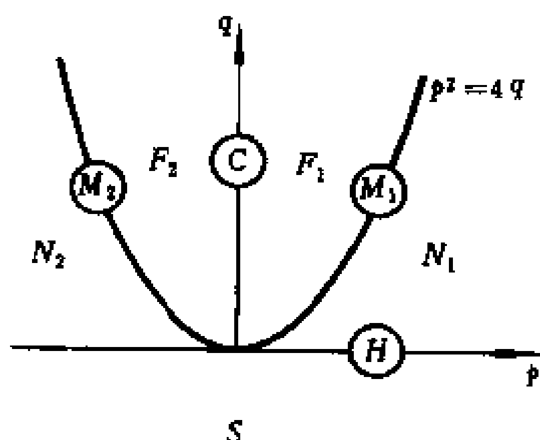


图 8-19

现在，我们考虑当系统(3.3)中的矩阵 A 不是约当标准型时，如何作出它的相图. 当然可以用代数方法化 A 为其标准型，但计算量一般较大. 我们给出一个简单而实用的方法：先用定理 6 直接判断奇点(0,0)的类型及其稳定性，然后应用下述的两个事实，就可以迅速作出相图.

(1) 当 $t\to+\infty$(或 $-\infty$)时，有的轨线能沿某一确定的直线 $y=kx$(或 $x=ky$)趋向奇点(0,0). 我们把这个直线的走向称为一个**特殊方向**. 显然，星形结点有无穷个特殊方向，两向结点和鞍点有两个特殊方向，单向结点有一个特殊方向，而焦点和中心没有特殊方向；并且当直线 $y=kx$(或 $x=ky$)给出线性系统(3.3)的一个特殊方向时，此直线被奇点分割的两个射线都是系统的轨线. 此外，这些性质还在仿射变换下不变.

(2) 线性系统(3.3)在相平面上给出的向量场关于原点(0,0)是对称的：如果在 (x,y) 点的向量是 $(P(x,y),Q(x,y))$，则在 $(-x,-y)$ 点的向量就是 $(-P(x,y),-Q(x,y))$.

【例 1】 作出系统

$$\frac{dx}{dt}=2x+3y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-3y$$

在(0,0)点附近的相图.

解 由于

$$q = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} < 0,$$

所以(0,0)是鞍点.显然 $x=0$ 不是特殊方向.设特殊方向为直线 $y=kx$ 所指的方向,其中常数 k 待定.则 $y=kx$ 是一条积分曲线.因此,我们有

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx} = \left.\frac{2x-3y}{2x+3y}\right|_{y=kx} = \frac{2-3k}{2+3k},$$

由此推出

$$3k^2 + 5k - 2 = 0,$$

解此方程得 $k_1 = \frac{1}{3}$ 和 $k_2 = -2$. 容易算出向量场在(1,0)点处的向量为(2,2). 再利用鞍点的结构和向量场的连续性,就可确定轨线的定向,从而不难作出相图 8-20. ▌

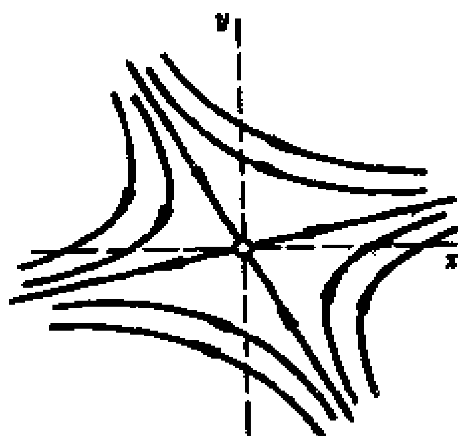


图 8-20

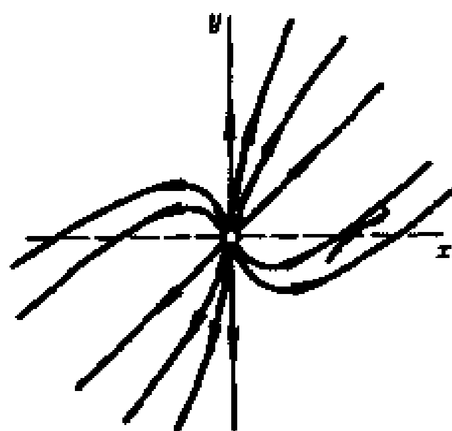


图 8-21

【例 2】 作出系统

$$\frac{dx}{dt} = 3x, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

的相图.

解 由于 $q=3$, $p=-4$ 和 $p^2-4q>0$, 所以(0,0)是不稳

定的两向结点(见定理 6). 显然 $x=0$ 是一特殊方向. 设另一特殊方向为 $y=kx$,则用类似于例 1 的计算,易得

$$k=\frac{2+k}{3},\quad 即得\quad k=1.$$

再利用向量场在(1,0)点处的向量为(3,2),不难作出图 8-21. ▌

【例 3】　作出系统

$$\frac{dx}{dt}=-x-y,\quad \frac{dy}{dt}=x-3y$$

的相图.

解　由于 $q=p=4$ 和 $p^2-4q=0$, 所以(0,0)是稳定的星形结点或单向结点(见定理 6). 显然 $x=0$ 不是特殊方向. 设特殊方向为 $y=kx$,则用类似于例 1 的计算易得

$$k=\frac{1-3k}{-1-k},\quad 即\quad k^2-2k+1=0.$$

此方程只有一个(二重)根 $k=1$, 因此(0,0)是稳定的单向结点. 再利用向量场在(1,0)点处的向量为(−1,1),不难确定轨线的定向并作出相图 8-22. ▌

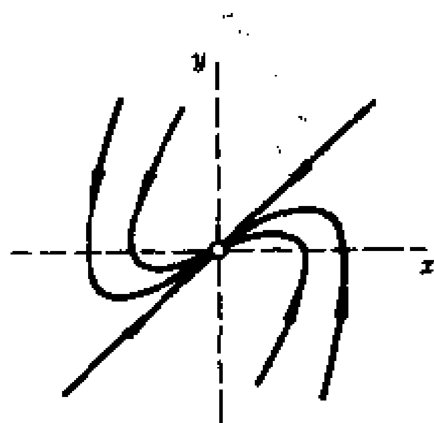


图 8-22

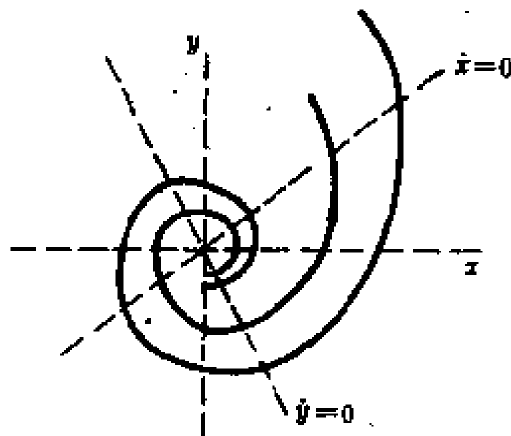


图 8-23

【例 4】　作出系统

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

的相图.

解　由于 $q = 3$，$p = -2$ 和 $p^2 - 4q < 0$，所以(0,0)是不稳定的焦点(见定理 6). 利用向量场在(1,0)点处的向量为(1,2)，及奇点的不稳定性，即可判断出轨线的旋转方向，从而不难作出相图 8-23. 为了使作图更准确，可以利用水平等斜线 $y = -2x$ 和垂直等斜线 $y = x$. ▌

最后，我们回到一般的(非线性)系统(3.1). 假设(0,0)是它的孤立奇点，我们来考察它在(0,0)点附近的轨线结构. 容易想到，先把系统(3.1)右端的函数分解成线性部分与高次项之和的形式，即

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x,y), \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 a,b,c,d 为实常数，φ 和 ψ 是 x,y 的高于一次的项. 然后考虑：当函数 φ 和 ψ 满足什么附加条件时，在相平面上(0,0)点附近，系统(3.12)与它的线性化系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \tag{3.13}$$

有相同的定性结构？

我们对(3.12)中的函数 φ 和 ψ 提出三组条件(其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)：

条件 A　$\varphi(x,y), \psi(x,y) = o(r)$，当 $r \to 0$.

条件 A*　$\varphi(x,y), \psi(x,y) = o(r^{1+\varepsilon})$，当 $r \to 0$；式中 ε 是一个任意小的正数.

条件 B　$\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 在原点的一个小邻域内对 x 和 y 连

续可微.

下面的定理回答了我们的问题,其证明可参见专著[23]中的第二章.

定理 7　(与线性化系统有相同定性结构的充分条件)

(1) 如果(0,0)是系统(3.13)的焦点且条件 A 成立,则(0,0)也是系统(3.12)的焦点,并且它们的稳定性也相同;

(2) 如果(0,0)是系统(3.13)的鞍点或两向结点且条件 A 和 B 成立,则(0,0)也分别是系统(3.12)的鞍点或两向结点,并且稳定性也相同;

(3) 如果(0,0)是系统(3.13)的单向结点且条件 A^* 成立,则(0,0)也是系统(3.12)的单向结点,并且稳定性相同;

(4) 如果(0,0)是系统(3.13)的星形结点且条件 A^* 和 B 成立,则(0,0)也是系统(3.12)的星形结点,并且稳定性相同.

总之,在上述条件下,系统(3.12)与其线性化系统(3.13)在奇点(0,0)附近有相同的**定性结构**. ▌

注意,对线性系统(3.13)得到的轨线结构是全局的,而定理 7 中对非线性系统(3.12)的结论却只适用于奇点(0,0)附近. 虽然它们在奇点附近的定性结构相同,但与线性系统(3.13)的相图相比,(3.12)的轨线可能有些"扭曲". 例如,虽然(3.12)的结点和鞍点仍有特殊方向,但此方向上被奇点分割的两条射线(在小邻域内)不一定还是(3.12)的轨线.

此外,还可以考虑比保持定性结构更弱的要求:保持拓扑结构. 并由此引出结构稳定的概念. 记 $\mathscr{X}$ 为所有形如(3.1)的系统之集合,其中 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 都是连续可微的. 所谓 $\mathscr{X}$ 中某一系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases} \tag{3.14}$$

的 ε- **邻近系统**，是指满足条件

$$|X-P|+\left|\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\right|$$

$$+|Y-Q|+\left|\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right|<\varepsilon$$

的任何系统(3.1). 有时，也把(3.14)的一个邻近系统称为它的一个扰动系统.

所谓 $\mathscr{H}$ 中的系统(3.1)与(3.14)**拓扑等价**，是指存在拓扑同胚 T，它把(3.1)(在某区域内)的轨线变到(3.14)(在相应区域内)的轨线，并且保持轨线的定向.

如果存在 $\varepsilon>0$，使系统(3.14)与其任一 ε- 邻近系统都是拓扑等价的，则称系统(3.14)是**结构稳定的**.

定理 8　如果系统(3.12)的线性部分矩阵的特征根实部都不为零[此时称(0,0)为它的**双曲奇点**]，则它在奇点(0,0)附近是(局部)结构稳定的，并拓扑等价于它的线性化系统. ▌

【附注 1】　非双曲奇点可分为两类：第一类，是系统在奇点 O 的线性部分所对应的矩阵 A 有零特征根(相应于图 8-19 中的 p 轴)，即 O 是高阶奇点. 对于孤立的高阶奇点，常用特殊的变换把它"打散"成几个初等奇点来研究它的相图. 详见[**23**]中第二章的 §3. 第二类，是矩阵 A 有一对共轭的纯虚特征根(相应于图 8-19 中的正 q 轴). 此时线性化系统以 O 为中心点. 加上高阶项以后，它可能仍是中心点，也可能变为稳定或不稳定的焦点. 这就产生了所谓**中心和焦点的判定**问题. 读者可参看[**23**]中第二章的 §5，或[**24**]中第二章的 §3 等.

【附注 2】　双曲奇点可能是焦点，(各类)结点或鞍点；但反之，焦点，结点和鞍点未必是双曲奇点，因为线性部分为中心点的奇点加上高阶项后可能成为焦点(我们称它为**细焦点**，它是结构不稳定的，见下节的 4.3 段)，而高阶奇点也可能具有结点或鞍点型.

【附注 3】　各类初等结点及焦点都彼此拓扑等价，只要它

们的稳定性相同. 通常我们把稳定的结点和焦点统称为**渊**，而把不稳定的结点和焦点统称为**源**.

3.2　极限环

若动力系统(3.1)在闭轨 Γ 的某个(环形)邻域内不再有别的闭轨，即 Γ 为孤立闭轨，则称它为(3.1)的**极限环**. 由此可以证明，极限环 Γ 有一个外侧邻域，使得在这个邻域内出发的所有轨线当 $t\to+\infty$(或 $t\to-\infty$)时都盘旋趋向 Γ. 同样，Γ 有一个类似的内侧邻域. 这就说明了极限环一词的含意. 如果极限环 Γ 内外两侧附近的轨线都在 $t\to+\infty$(或 $-\infty$)时盘旋趋于 Γ，则称 Γ 为**稳定**(或**不稳定**)**极限环**(如图 8-32(b)中的 Γ_2(或 Γ_1))；如果一侧附近的轨线当 $t\to+\infty$ 时盘旋趋于 Γ，而在另一侧当 $t\to-\infty$ 时盘旋趋于 Γ，则称 Γ 为**半稳定极限环**(如图 8-32(a)中的 Γ). 注意，这里所谓稳定已不再是李雅普诺夫意义下的稳定性，因为 Γ 上的周期运动与它邻近轨道上的盘旋运动可能不同步，尽管初值点可以取得很靠近，而且它们的轨道也很靠近，但在运动过程中它们的相点仍可能彼此远离. 此时 Γ 是作为它邻近轨道(几何上)的极限状态而出现的，因此把这种稳定性称为**轨道稳定性**.

稳定的极限环(如图 8-32(b)中的 Γ_2)表示了运动的一种稳定的周期态，它在非线性振动问题中有重要的意义. 关于判断极限环存在性的方法，我们只陈述下面著名的**庞卡莱-班迪克松(Poincaré-Bendixson)环域定理**，它的证明可见任何一本微分方程定性理论的著作(例如[**23**]).

定理 9　设区域 D 是由两条简单闭曲线 L_1 和 L_2 所围成的环域，并且在 $\bar{D}=L_1\cup D\cup L_2$ 上动力系统(3.1)无奇点；从 L_1 和 L_2 上出发的轨线都不能离开(或都不能进入)$\bar{D}$. 设 L_1 和 L_2 均不是闭轨线，则系统(3.1)在 D 内至少存在一条闭轨线 Γ，它与 L_1 和 L_2 的相对位置见图 8-24，即 Γ 在 D 内不能收缩到一点. ▌

如果把动力系统(3.1)看成一平面流体的运动方程，那么上

述环域定理表明：如果流体从环域 D 的边界流入 D，而在 D 内又没有渊和源，那么流体在 D 内有环流存在. 这个力学意义是比较容易想象的. 习惯上，把 L_1 和 L_2 分别叫作 Poincaré-Bendixson 环域的内、外境界线. 注意，定理 9 中的 Γ 不一定是孤立的闭轨. 但可以证明，对于解析向量场，环域中的闭轨都是孤立的，因而是极限环.

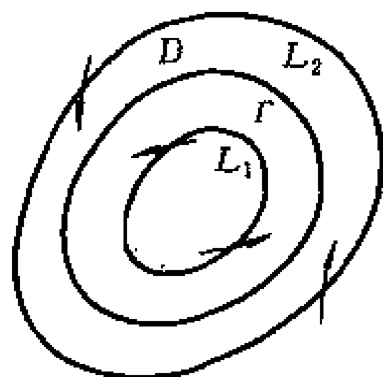


图 8-24

我们以著名的 van der Pol 方程（三极管电路的数学模型）

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{3.15}$$

（常数 $\mu > 0$）为例，说明如何利用环域定理来证明极限环的存在性. 为此，我们先考虑一类更广泛的方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{3.16}$$

它称作 **Liénard 方程**，其中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 连续，且 $xg(x) > 0$，当 $x \neq 0$. 容易验证，方程(3.16) 等价于系统

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = - g(x). \tag{3.17}$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$. 当 $g(x) = x$ 时，我们可以用下述简单方法画出系统(3.17) 在相平面上的向量场 $(y - F(x), -x)$ 在任一点 $P(x,y)$ 处的方向. 这对下文中构造境界线是有用的.

3.3 Liénard 作图法

从图 8-25 中的 P 点作 y 轴的平行线. 它交曲线 $y = F(x)$ 于点 $R(x,F(x))$，再从 R 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 $Q(0,F(x))$，则从 P 点所引的与直线 $\overline{PQ}$ 垂直的方向就是向量场(3.17) 在 P 点的方向. 事实上，直线 $\overline{PQ}$ 的斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y - F(x)}{x},$$

因此，它在 P 点的垂直线的斜率为

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{-x}{y - F(x)},$$

而它就表示向量场 $(y - F(x), -x)$ 在 $P(x,y)$ 点的方向(箭头的方向可由第二个分量 $-x$ 决定).

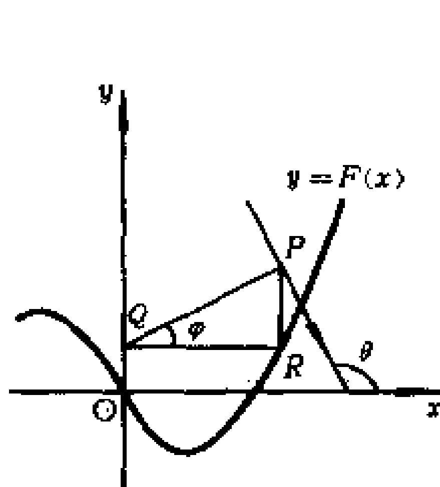


图 8-25

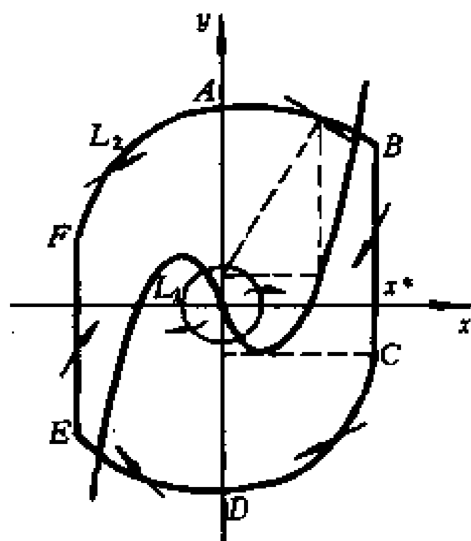


图 8-26

【例 5】　van der Pol 方程(3.15)至少有一个闭轨.

证明　不妨在方程(3.15)中取 $\mu = 1$，并且考虑与它等价的系统

$$\frac{dx}{dt} = y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right),\quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{3.18}$$

先作环域的内境界线 L_1. 令 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，则

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.18)} = x^2\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \geqslant 0,\quad 当\ |x| < \sqrt{3},$$

并且上面的等号仅在 $x = 0$ 时成立. 因此，对于足够小的正数 C，可以取圆周 $x^2 + y^2 = C$ 为内境界线 L_1(见图 8-26). 事实上，由李雅

普诺夫函数的几何解释易知，系统(3.18)从 L_1 上出发的轨线走向 L_1 所围区域的外部.

再利用 Liénard 作图法构造外境界线 L_2. 注意曲线 $y=\frac{x^3}{3}-x$ 的极小值在点$(1,-\frac{2}{3})$达到. 取 $x^*>0$ 足够大，以点 $S(0,-\frac{2}{3})$ 为中心分别以 $x^*+\frac{4}{3}$ 和 x^* 为半径作圆弧$\widehat{AB}$和$\widehat{CD}$，它们与 y 轴分别交于点 A 和 D，而与直线 $x=x^*$ 分别交于点 B 和 C. 再作$\widehat{DE}$，$\overline{EF}$，$\widehat{FA}$，它们分别与$\widehat{AB}$，$\overline{BC}$，$\widehat{CD}$ 关于原点对称. 取外境界线为

$$L_2=\widehat{AB}\cup\overline{BC}\cup\widehat{CD}\cup\widehat{DE}\cup\overline{EF}\cup\widehat{FA}$$

即可. 事实上，当 x^* 足够大时，$y_A=x^*+\frac{2}{3}<\frac{x^{*3}}{3}-x^*$；又由于当 $x>0$ 时 $\dot{y}<0$，因此 $y_B<y_A$. 这说明 B 点在曲线 $y=F(x)$ 的下方，从而在$\overline{BC}$上的每一点有 $\dot{x}=y-F(x)<0$，即轨线的正向指向 L_2 的内部. 由 Liénard 作图法易知，在$\widehat{AB}$ 和$\widehat{CD}$ 上，轨线也是指向 L_2 的内部.

这样，由 L_1 和 L_2 围成了一个 Poincaré-Bendixson 环域，并且系统的唯一奇点(0,0)在此环域之外. 由定理 9 知，系统(3.18)在环域中至少有一个闭轨. ▌

一般而言，判断一个系统有无极限环和极限环存在时的个数都是相当困难的问题，在专著[**21**]和[**23**]中对此有详细论述，其中不仅证明了上述 van der Pol 方程的闭轨是唯一的，而且给出了许多有关极限环的存在性、唯一性和唯 n 性的判别法则.

希尔伯特(Hilbert，1862－1943)在 1901 年提出了著名的 23 个数学难题，其中第 16 个问题的后半部分可陈述为：记 $P_n(x,y)$ 和 $Q_n(x,y)$ 是 x,y 的 n 次多项式，那么对于给定的 $P_n(x,y)$ 与 $Q_n(x,y)$(或更进一步，对于给定的 n 和任意的 $P_n(x,y)$ 与 $Q_n(x,y)$)，系统

$$\frac{dx}{dt}=P_n(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q_n(x,y)$$

最多有几个极限环？它们的相对位置如何？这个问题即使在 n 等于 2 的情形也没有完全解决，可见问题的艰难. 对此感兴趣的读者，可参考文献[21]和[23]中的有关章节.

3.4 Poincaré 映射与后继函数法

作为本节的结束，我们将简单地介绍研究极限环的另一个重要方法 —— **后继函数法**.

设 Γ 是系统(3.1)的闭轨. 在 Γ 上取一点 P，过 P 作 Γ 的法线 $\overline{MPN}$. 设 P_0 是法线上的任一点，则由解对初值的连续依赖性可知，只要 P_0 足够靠近 P，从 P_0 出发的轨线必再次与法线 $\overline{MN}$ 相交(记交点为 P_1)，并且都是从法线的同一侧穿越到另一侧(习惯上把法线靠近 P 点的这一段叫作**无切线段**). 我们把 P_1 称为 P_0 的**后继点**；把 $\overline{MN}$ 上从 P_0 到其后继点 P_1 的映射称为 **Poincaré 映射**. 不难看出，Poincaré 映射的不动点对应于系统的闭轨.

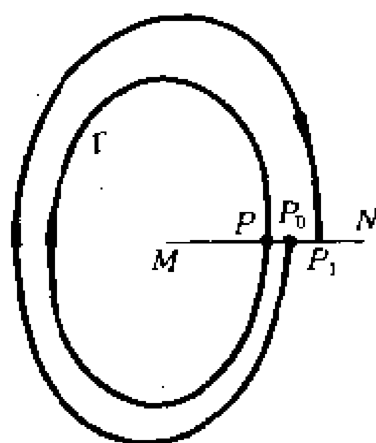


图 8-27

为便于计算，我们在 $\overline{MN}$ 上引入坐标 n：取 P 为坐标原点(即 $n=0$)，取 Γ 的外法线方向为正. 设 P_0 点的坐标为 n_0，而其后继点 P_1 的坐标为 $n_1=g(n_0)$，这里的函数 $g(n_0)$ 称为**后继函数**.

现在令

$$h(n_0)=g(n_0)-n_0,$$

则不难看出，如果当 $0<n_0\ll 1$ 时恒有 $h(n_0)<0$(或 >0)，那么 Γ 是外侧稳定(或不稳定)的；如果当 $n_0<0$ 且 $0<|n_0|\ll 1$ 时有 $h(n_0)>0$(或 <0)，那么 Γ 是内侧稳定(或不稳定)的.

由于 Γ 是过点 P 的闭轨，所以由上述坐标的选取可知，它对应

于 $h(0)=0$. 假设

$$h(0)=h'(0)=\cdots=h^{(k-1)}(0)=0,\quad h^{(k)}(0)\neq 0,\tag{3.19}$$

则有

$$h(n_0)=\frac{1}{k!}h^{(k)}(0)(n_0)^k+O[(n_0)^{k+1}].$$

因此，当 k 为奇数并且 $h^{(k)}(0)<0$（或 >0）时，Γ 是稳定（或不稳定）的极限环；当 k 是偶数时，Γ 是半稳定的极限环.

如果 $h'(0)\neq 0$，即 $h(n)$ 以 0 为单重根，则称 Γ 是一个**单重极限环**；如果(3.19)成立且 $k\geqslant 2$，则称 Γ 为 **k 重极限环**. 由上面的讨论可知，单重极限环必是稳定或不稳定的，而偶重极限环都是半稳定的，并且容易看出下面的结果成立.

定理 10　系统(3.1)的单重极限环 Γ 是结构稳定的. 亦即：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 Γ 的环形邻域 $\mathscr{U}$，使得(3.1)的任一 ε- 邻近系统在 $\mathscr{U}$ 内仍有唯一闭轨，且它是与 Γ 有相同稳定性的极限环. ▌

习　题　8-3

1. 设线性系统(3.3)以(0,0)为高阶奇点，试作出其相图.

2. 判断下列方程的奇点(0,0)的类型，并作出该奇点附近的相图：

   (1) $\dot{x}=4y-x,\quad \dot{y}=-9x+y$;

   (2) $\dot{x}=2x+y+xy^2,\quad \dot{y}=x+2y+x^2+y^2$;

   (3) $\dot{x}=2x+4y+\sin y,\quad \dot{y}=x+y+e^y-1$;

   (4) $\dot{x}=x+2y,\quad \dot{y}=5y+2x-x^3$;

   (5) $\dot{x}=x(1-y),\quad \dot{y}=y(1-x)$.

3. 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内连续可微，且

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\neq 0,\quad 当(x,y)\in D$$

试证系统

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y)$$

在 D 内不存在闭轨线.

* § 4.　结构稳定与分支现象

4.1　一个结构稳定性定理

在高维空间中的结构稳定性问题是十分复杂和困难的．我们只考虑平面系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y),\quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y),\tag{4.1}$$

其中函数 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 是连续可微的．为确定起见，设它们定义在圆盘 $\Sigma: x^2+y^2 \leqslant R^2$ 上（常数 $R>0$），并且由(4.1)给出的向量场与 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 不相切．

把所有满足上述条件的系统所组成的集合记为 $\mathscr{X}(\Sigma)$，则可考虑在 $\mathscr{X}(\Sigma)$ 内一个给定系统的结构稳定性（结构稳定的定义见上节）．下面的定理是苏联学者 Андронов 和 Понтрягин 在 1937 年提出的，直到 1957 年才由他人给以严格的证明．

定理 11　在 $\mathscr{X}(\Sigma)$ 中系统(4.1)结构稳定的充要条件是：

1）它只有有限个奇点，且都是双曲的（即：在奇点处线性部分矩阵的特征根实部均不为零）；

2）它只有有限条闭轨，且都是单重极限环；

3）它没有从鞍点到鞍点的轨线．▌

从上一节的讨论中我们知道，这里的条件 1）和 2）是比较自然的，它们都是结构稳定的充分条件．对于条件 3)，现在作一点直观的说明：当 $t\to+\infty$（或 $-\infty$）时，如果一条轨线趋向于一个初等结点或焦点，则从充分靠近此轨线的点出发的其它轨线也有相同的归宿．但是鞍点（即使是初等鞍点）不具有这个性质．事实上，如果一条轨线当 $t\to+\infty$（或 $-\infty$）时趋向于一个鞍点[此时称这轨线为这个鞍点的一条**分界线**]，则无论取分界线外多么靠近的点为初始点，所得轨线却与分界线有不同的归宿．因此，若一条轨线

两端都趋于鞍点，则它在扰动下可能破裂，从而改变轨线族的拓扑结构，见图 8-28. 我们把两端趋于同一鞍点的轨线称为**同宿轨线**，而把两端趋于不同鞍点的轨线称为**异宿轨线**.

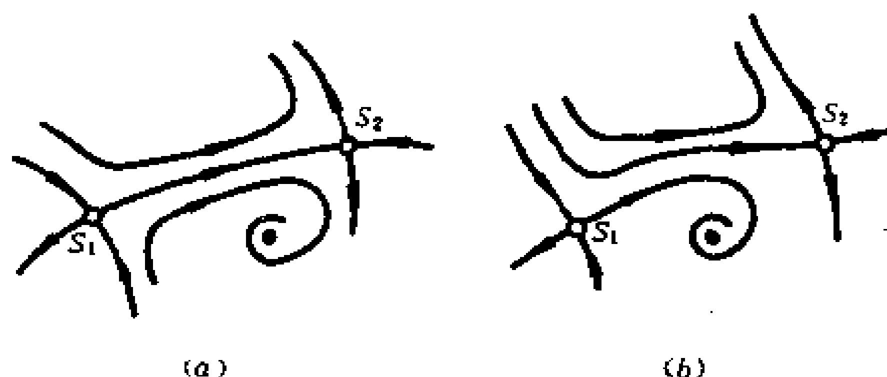


图 8-28　(a) 扰动前　(b) 扰动后

下面，我们通过一些实例来说明，定理 11 中的条件都是必要的. 就是说，当其中某一条件不满足时，相应的系统(4.1)不是结构稳定的. 实际上，作为系统(4.1)的扰动系统，我们考虑

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{X}(x,y,\alpha), \quad \frac{dy}{dt} = \widetilde{Y}(x,y,\alpha), \qquad (4.2)_\alpha$$

其中参数 $\alpha \in R^k (k \geqslant 1)$，函数 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 对所有变元连续可微，并且 $(4.2)_0 = (4.1)$，亦即

$$\widetilde{X}(x,y,0) \equiv X(x,y), \quad \widetilde{Y}(x,y,0) \equiv Y(x,y).$$

如果对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 α，使得 $(4.2)_\alpha$ 是(4.1)的 ε- 邻近系统，但 $(4.2)_\alpha$ 与(4.1)[即 $(4.2)_0$] 不拓扑等价，则显然系统(4.1)就是结构不稳定的. 此时，我们称 $\alpha = 0$ 是系统族 $(4.2)_\alpha$ 的一个**分支值**. 形象地说，当 α 连续变动到 0 时，$(4.2)_\alpha$ 的轨线族的结构发生了突变.

4.2　高阶奇点的分支

我们将举例说明高阶奇点的分支现象. 例如,以(0,0)为一个高阶奇点的系统

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y^2 \tag{4.3}$$

是结构不稳定的. 注意,系统(4.3)的线性部分矩阵有一个特征根为零,因此定理 11 中的条件 1)不成立.

考虑(4.3)的扰动系统

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=\varepsilon+y^2, \tag{4.4$_\varepsilon$}$$

其中 ε 为一个实参数. 不难看出,当 $\varepsilon>0$ 时,系统$(4.4)_\varepsilon$没有奇点;当 $\varepsilon=0$ 时,$(4.4)_\varepsilon$[即(4.3)]以(0,0)为唯一奇点;而当 $\varepsilon<0$ 时,系统$(4.4)_\varepsilon$有两个不同的奇点 $(0,\sqrt{-\varepsilon})$ 和 $(0,-\sqrt{-\varepsilon})$. 这说明无论 $|\varepsilon|$ 多么小,$(4.4)_\varepsilon$与(4.3)都不可能拓扑等价. 因此系统(4.3)是结构不稳定的. 而且 $\varepsilon=0$ 是$(4.4)_\varepsilon$的一个分支值. 图 8-29 表示了奇点纵坐标与参数 ε 的关系. 当 ε 越过 0 点时,奇点个数发生了突变.

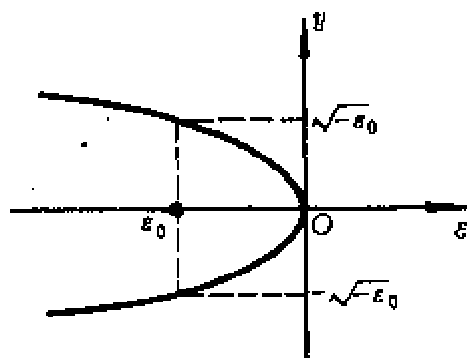


图 8-29

再来看轨线结构随 ε 而变化的情况. 当 $\varepsilon<0$ 时,用上节的定理 6 容易知道 $(0,\sqrt{-\varepsilon})$ 是不稳定的(正常)结点,而 $(0,-\sqrt{-\varepsilon})$ 是一个鞍点,并且随着 $|\varepsilon|$ 逐渐减小,这两个奇点逐渐靠近;当 $\varepsilon=0$ 时,它们拼合成一个半鞍半结型的奇点,叫作**鞍-结点**;而当 $\varepsilon>0$ 时,奇点消失. 下面的图 8-30 形象地描绘了当参数 ε 从负值变化到正值时,$(4.4)_\varepsilon$的奇点个数、位置及邻近轨线结构的变化情形. 我们

把这种分支现象称为鞍-结点分支.

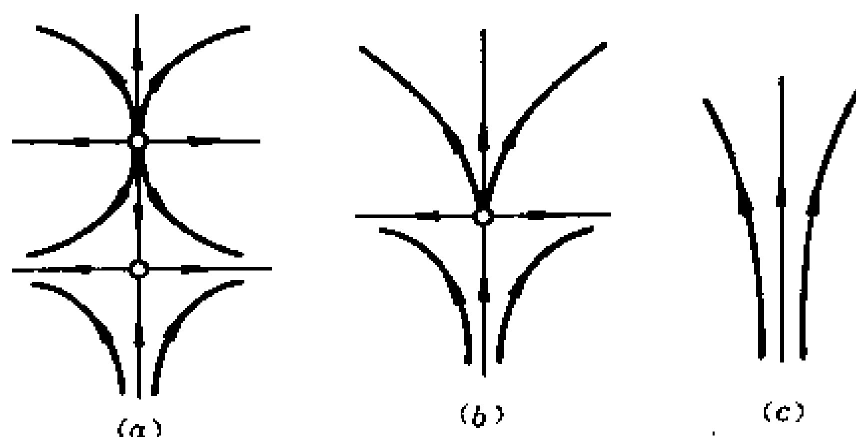


图 8-30 鞍-结点分支

(a)$\varepsilon < 0$,两个奇点 (b)$\varepsilon = 0$,一个奇点 (c)$\varepsilon > 0$,无奇点

4.3 Hopf 分支

现在考察定理 11 中的条件 1) 遭到破坏的另一种方式:没有零特征根,但有一对纯虚数特征根.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2), \end{cases} \tag{4.5}$$

及其扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \tag{4.6}_\varepsilon$$

显然,$(4.6)_\varepsilon$ 的线性部分矩阵有特征根 $\varepsilon \pm i$. 由定理 6 易知,当 ε 的取值由负变正时,系统$(4.6)_\varepsilon$ 的奇点(0,0)由稳定焦点变为不稳定焦点. 因此,$\varepsilon = 0$ 是一个分支值,而系统(4.5)是结构不稳定的.

现在考察当 ε 变动通过 0 时,系统$(4.6)_\varepsilon$ 的相图发生了什么突

变．为此引入极坐标 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则(4.6)$_\varepsilon$ 化为

$$\dot{r} = r(\varepsilon - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

由此可以明显地看出，当 $\varepsilon \leqslant 0$ 时，原点是稳定焦点，并且在原点附近不存在闭轨；而当 $\varepsilon > 0$ 时，原点变为不稳定的焦点，并且有唯一的闭轨 $r = \sqrt{\varepsilon}$，它是稳定的极限环，见下面的图 8-31.



图 8-31 Hopf 分支

(a)$\varepsilon \leqslant 0$，无闭轨 (b)$\varepsilon > 0$，有闭轨

形象地说，当 ε 的值增大而通过 0 的一瞬间，奇点的稳定性发生翻转，同时一个稳定的极限环从奇点"跳出"，并随着 ε 的增大而逐渐扩大．这种分支现象叫作 **Hopf 分支**.

4.4 Poincaré 分支

对于以(0,0)为中心点的系统

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x,$$

考虑扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon x(x^2 + y^2 - 1 - \varepsilon), \\ \dot{y} = x - \varepsilon y(x^2 + y^2 - 1 - \varepsilon). \end{cases}$$

化为极坐标方程后容易看出，当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时，扰动系统以圆周

$x^2+y^2=1+\varepsilon$ 为唯一闭轨，它是一个极限环. 因此，扰动前后系统的轨线族有完全不同的结构，这说明 $\varepsilon=0$ 是一个分支值. 与 Hopf 分支不同，这里的闭轨不是由于焦点的稳定性改变而产生的，事实上它不随 $\varepsilon\to 0$ 而收缩到奇点，而是趋于闭轨 $x^2+y^2=1$. 或者反过来说，我们可以把它看成是原来的中心型奇点的闭轨族中的某一闭轨，在扰动后不破裂而成为扰动后系统的一条孤立闭轨. 这就是所谓 **Poincaré 分支**.

4.5 多重闭轨的分支

现在考察定理 11 中的条件 2) 不成立的情形.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}=-y-x(x^2+y^2-1)^2, \\ \dot{y}=x-y(x^2+y^2-1)^2, \end{cases} \tag{4.7}$$

及其扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x}=-y-x(x^2+y^2-1+\varepsilon)(x^2+y^2-1-\varepsilon), \\ \dot{y}=x-y(x^2+y^2-1+\varepsilon)(x^2+y^2-1-\varepsilon), \end{cases} \tag{4.8$_\varepsilon$}$$

其中 $0\leqslant\varepsilon\ll 1$. 取极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则 $(4.8)_\varepsilon$ 化为

$$\begin{cases} \dot{r}=-r[r^2-(1-\varepsilon)][r^2-(1+\varepsilon)], \\ \dot{\theta}=1. \end{cases} \tag{4.9$_\varepsilon$}$$

当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，从 $(4.9)_\varepsilon$ 的第一个方程易见，系统存在二个闭轨 Γ_1: $r=\sqrt{1-\varepsilon}$ 和 Γ_2: $r=\sqrt{1+\varepsilon}$; 并且在 Γ_1 内部和 Γ_2 外部恒有 $\dot{r}<0$, 而在 Γ_1 和 Γ_2 之间恒有 $\dot{r}>0$. 由此可知，Γ_1 和 Γ_2 是系统 $(4.9)_\varepsilon$ 仅有的两个闭轨，并且分别是不稳定极限环和稳定极限环. 当 $\varepsilon=0$ 时，显然 $(4.9)_0$[即 (4.7)] 有唯一闭轨 Γ: $r=1$, 并且在它的两侧均有 $\dot{r}<0$，所以它是一个半稳定的极限环，从而是多重环. 上面的分析表明，当 ε 的值减小到 0 时，系统 $(4.9)_\varepsilon$ 的两个极限环重合而成为一个半稳定的极限环（或者反过来说，当 ε 的值从 0 增加时，一个半稳定的极限环分裂成两个极限环），使轨线结构发生了突变. 我们把这种分支现象称为**多重闭轨的分支**. 图 8-32

显示了系统的相图随 ε 的变化情形.

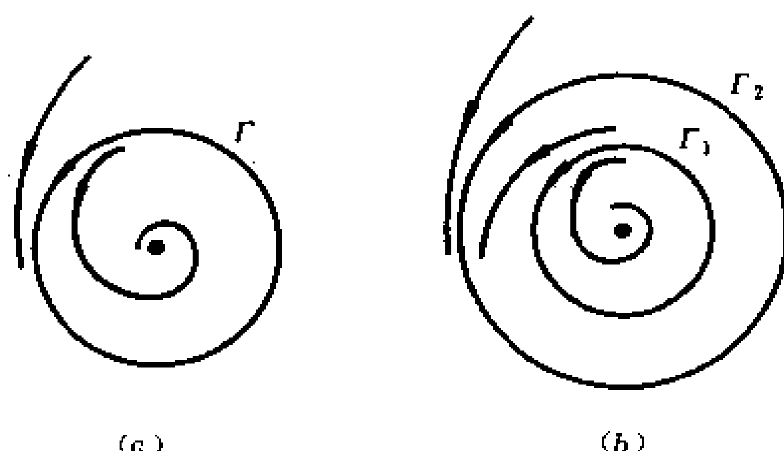


图 8-32　多重闭轨的分支

(a) $\varepsilon=0$，一个半稳定极限环　(b) $\varepsilon>0$，稳定与不稳定极限环各一

4.6　同宿轨线的分支

最后来考察定理 11 中的条件 3) 遭到破坏的情况. 我们在 4.1 段中已经说过，从鞍点到鞍点的轨线在扰动下可能破裂，并趋向其它奇点. 因此，具有这种分界线的系统不是结构稳定的. 现在要进一步讨论在分支现象发生时产生闭轨的可能性.

可以构造出单参数的系统族

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y,\varepsilon),\quad \frac{dy}{dt}=Y(x,y,\varepsilon),\qquad (4.10)_\varepsilon$$

使得当 $\varepsilon=0$ 时系统 $(4.10)_0$ 有图 8-33 (b) 所示的轨线结构：它具有一条从初等鞍点 S 到 S 的同宿轨线 L，L 内部是稳定的初等焦点 F 的吸引域；而当 $\varepsilon\neq0$ 时，L 破裂为两条分界线，它们的相对位置依 ε 的符号而异，见图 8-33 的 (a) 与 (c).

显然，在情形 (c) 中分界线破裂的方向与内部焦点的稳定性相配合，就构成了一个 Poincaré-Bendixson 环域，从而系统 $(4.10)_\varepsilon$ 存在极限环. 当 $|\varepsilon|$ 充分小时，可以使这个环域充分靠近原来的同宿

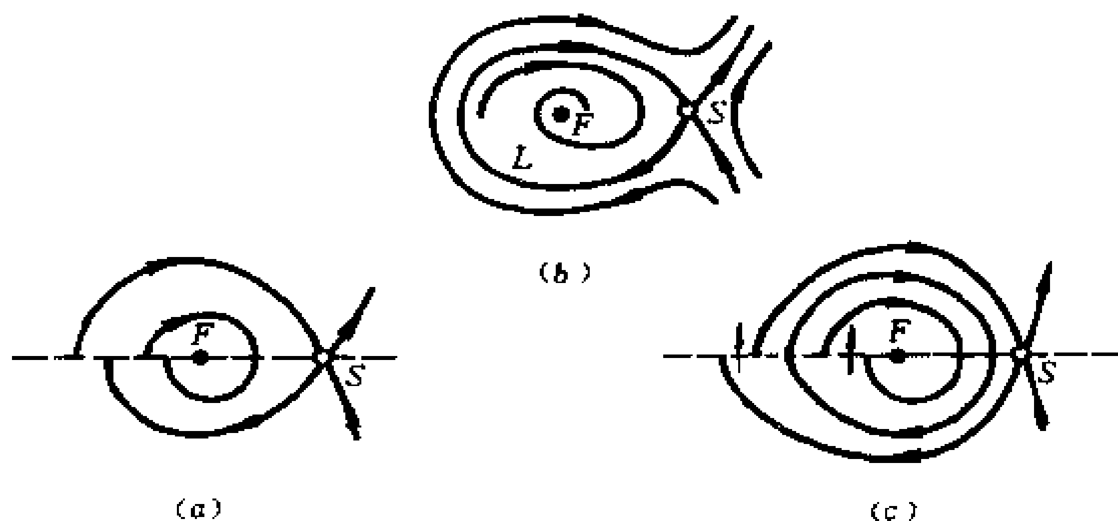


图 8.33　同宿轨线的分支

(a) $\varepsilon < 0$，无闭轨　(b) $\varepsilon = 0$，有同宿轨　(c) $\varepsilon > 0$，有闭轨

轨线 L. 因此就可以把极限环看成是 L 经扰动破裂而产生的. 这种分支现象叫作**同宿(轨线的)分支**，也可以类似地讨论**异宿(轨线的)分支**.

现在，我们来构造一个具体的例子，它具有上述同宿分支现象. 为此，先要做一些准备. 考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x\left(1 - \dfrac{3}{2}x\right), \end{cases} \tag{4.11}$$

它有两个奇点：$O(0,0)$ 和 $A(0,\frac{2}{3})$. 利用上节 3.1 段的讨论可知，如果仅考察(4.11)右端在点 O 与 A 的线性部分，则奇点 O 为中心点，而奇点 A 为初等鞍点. 对于非线性系统(4.11)，由上节定理 7 易知奇点 A 仍是一个鞍点；但判断奇点 O 的性质并不如此简单(见附注 1). 不过我们可以把(4.11)的两个方程相除消去 t，从而得到系统(4.11)的一个首次积分

$$F(x,y) := y^2 + x^2 - x^3 = C, \tag{4.12}$$

其中 C 为任意常数. 由此式不难作出(4.11)的相轨线图，并且知

道奇点 O 仍是一个中心点．为了下面讨论的方便，我们在(4.12)中令

$$C=\frac{4}{27}-\varepsilon,$$

则有下列结论：

(1) 当 $\varepsilon=0$ 时，由(4.12)得到系统(4.11)的鞍点分界线 $S_0=\Gamma_0\cup H_0$，其中 Γ_0 是鞍点 A 的同宿轨线，而 H_0 把(x,y)平面分成左、右两部分(见图 8-34)．

(2) 当 $\varepsilon<0$ 时，由(4.12)可确定系统(4.11)的一条(无界)轨线 S_ε，它位于 Γ_0 所围有界区域之外和 H_0 的左侧．当 $\varepsilon\to0^-$ 时，S_ε 收缩到 $\Gamma_0\cup H_0$．

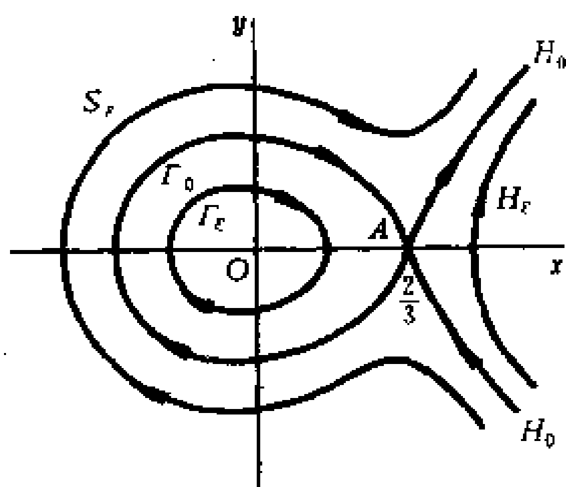


图 8-34

(3) 当 $\varepsilon>0$ 时，由(4.12)可确定系统(4.11)的二条轨线，其中一条为闭轨 Γ_ε，它位于 Γ_0 所围有界区域之内；而另一条(无界)轨线 H_ε 在 H_0 的右侧．当 $\varepsilon\to0^+$ 时，Γ_ε 趋于 Γ_0，而 H_ε 趋于 H_0．

现在令

$$f(x,y,\varepsilon)=F(x,y)-\left(\frac{4}{27}-\varepsilon\right),$$

其中的 $F(x,y)$ 由(4.12)式定义，则 $f(x,y,\varepsilon)$ 有如下性质：

(A) 若 $\varepsilon<0$ 且 $|\varepsilon|\ll1$，则

$f(x,y,\varepsilon)<0$，当(x,y)在 S_ε 的右侧区域；

$f(x,y,\varepsilon)=0$，当$(x,y)\in S_\varepsilon$；

$f(x,y,\varepsilon)>0$，当(x,y)在 S_ε 的左侧区域．

(B) 若 $\varepsilon=0$，则

$f(x,y,0)<0$，当(x,y)在 Γ_0 所围区域之内或 H_0 右侧；

$f(x,y,0)=0$，当$(x,y)\in\Gamma_0\cup H_0$；

$f(x,y,0)>0$，当(x,y)在Γ_0所围区域之外和H_0左侧.

(C) 若$\varepsilon>0$且$|\varepsilon|\ll 1$,则

$f(x,y,\varepsilon)<0$，当(x,y)在Γ_ε所围区域之内或H_ε右侧；

$f(x,y,\varepsilon)=0$，当$(x,y)\in\Gamma_\varepsilon\cup H_\varepsilon$；

$f(x,y,\varepsilon)>0$，当(x,y)在Γ_ε所围区域之外和H_ε左侧.

利用函数$f(x,y,\varepsilon)$,我们构造下面的系统族

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)+f(x,y,\varepsilon)y.\end{cases}\tag{4.13$_\varepsilon$}$$

容易算出函数F通过微分方程$(4.13)_\varepsilon$对t的全导数为

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{(4.13)_\varepsilon}=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right|_{(4.13)_\varepsilon}$$
$$=2f(x,y,\varepsilon)y^2.$$

我们曾在 §2 的 2.3 段利用这种全导数研究过轨线的走向. 现在用同样的方法并注意到$f(x,y,\varepsilon)$的上列性质$(A)-(C)$,就可以断言：当$\varepsilon<0,\varepsilon=0$和$\varepsilon>0$时,系统$(4.13)_\varepsilon$的相图分别具有图 8-33 中$(a)$,$(b)$和$(c)$的三种不同结构. 我们把讨论的细节留给读者作为练习,而仅指出一点：当$\varepsilon=0$时,系统$(4.13)_0$的鞍点同宿轨线就是系统(4.11)的鞍点同宿轨线,但其所围区域内的奇点却是焦点；当$\varepsilon>0$时，系统$(4.13)_\varepsilon$的唯一闭轨就是系统(4.11)的闭轨Γ_ε. 由此可知，$\varepsilon=0$是系统$(4.13)_\varepsilon$的一个同宿轨线的分支值.

4.7 奇异向量场的普适开折

作为这一节的结束,我们介绍一个向量场分支的典型例子,它把上面论及的多种分支现象有机地联系起来，并由此引出所谓普适开折的新概念. 这个例子是 Bogdanov 和 Takens 于 1974 — 1976 的工作,它对近年来在向量场的分支方面的研究具有重要意义.

考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + xy. \end{cases} \tag{4.14}$$

它的线性部分的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵 A 以 0 为二重特征根，所以奇点(0,0)是非双曲的. 这时我们就说向量场具有**奇异性**. 虽然系统(4.14)在奇点(0,0)附近的相图并不难作出(见图 8-35)，但我们知道这是结构不稳定的. 因此，我们关心的是它在扰动下会出现什么样的变化. 对于系统(4.14)来说，有如下两方面的结论(我们只陈述结果，对证明感兴趣的读者可参看文献[**17**,444 — 450 页]、[**18**,364 — 371 页]和[**19**,280 — 282 页]及其所引的有关论文)：

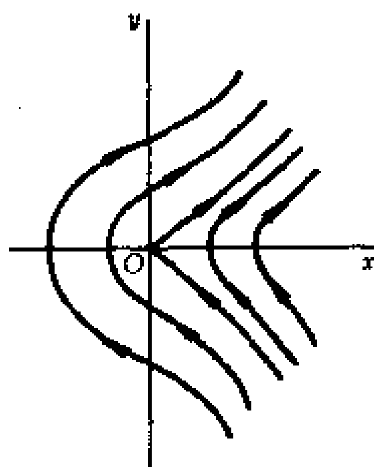


图 8-35

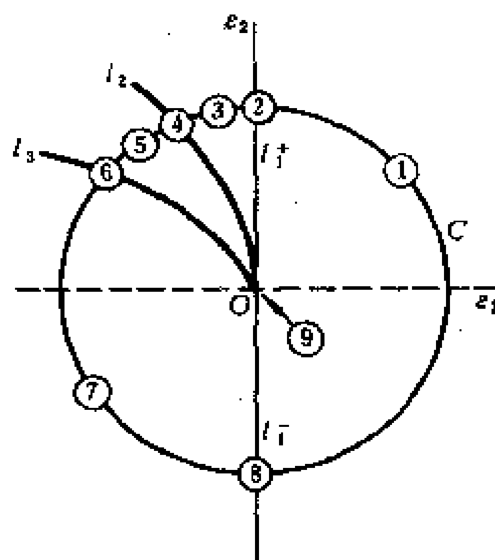


图 8-36

结论 1 当$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$在参数空间的原点附近变动时，(4.14)的扰动系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = y, \\
\dfrac{dy}{dt} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y + x^2 + xy
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

在相空间的原点附近有且只有 9 种不同的拓扑结构，其中 4 种是结构稳定的，而另外 5 种是结构不稳定的.

具体地说，参数空间中原点附近的邻域被四条会聚于原点的光滑曲线 l_1^+，l_1^-，l_2 和 l_3 分割成四个连通区域，当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 位于每一个这样的区域时，系统(4.15)是结构稳定的. 曲线 l_1^+ 和 l_1^- 分别是正 ε_2 轴和负 ε_2 轴，当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 穿过它们时，系统(4.15)发生鞍-结点分支；曲线 l_2 的方程是 $\{\varepsilon_1 = -\varepsilon_2^2,\ \varepsilon_2 > 0\}$，当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 穿过它时，发生 Hopf 分支；而 l_3 的方程是 $\{\varepsilon_1 = -\dfrac{49}{25}\varepsilon_2^2 + O(\varepsilon_2^{5/2}),\ \varepsilon_2 > 0\}$，当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 穿过它时，发生同宿轨线分支. 图 8-36 描绘了这四条分支曲线的情形，因此叫作**分支图**.

再来看相图的变化. 假设参数 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 在图 8-36 中沿原点附近的圆周 C 连续变动，则在位置 ①—⑧ 所对应的相图如图 8-37 所示，而位置 ⑨(相应于 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) 对应于相图 8-35.

从图 8-37 的一系列相图中可以清楚地看出，系统的轨线结构如何随 ε 的变化而变化：当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 位于图 8-36 的区域①时，系统无奇点；当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 变化而通过 l_1^+ 时，一个鞍-结点突然产生，并立即分裂为一个鞍点和一个不稳定结点，然后结点转化为不稳定焦点(注意，结点和焦点的拓扑类型相同)；当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 变化通过 l_2 时，焦点改变稳定性，发生 Hopf 分支，一个不稳定极限环从奇点跳出，并随 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的继续变化而膨胀；当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 通过 l_3 时，它形成了同宿轨线，并随即破裂，然后两个奇点又重新靠近；当 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 通过 l_1^- 时，这两个奇点再次结合成鞍-结点，然后消失. 须指出的是，虽然图 8-37 中的④与③表面上相同，但③中的焦点是一个简单奇点，因而是结构稳定的，而④中的却是一个细焦点(见 §3 的附注 2)，因而是结构不稳定的. 此外，图⑦与图③的不同之处在于，它们所

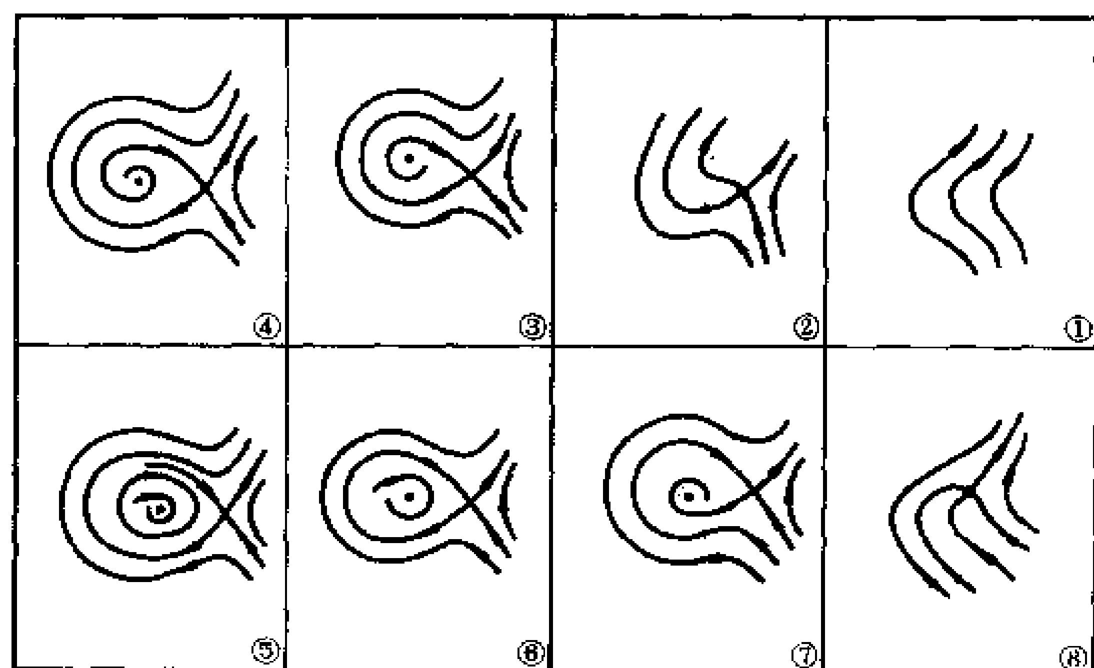


图 8-37

含的焦点的稳定性相反，而且鞍点的两分界线的“内外位置”亦相反；图⑧与图②相比，不仅鞍-结点的“半结型”区域的稳定性相反，而且“半鞍型”区域的分界线的走向也相反.

结论 2　系统(4.14)的任意扰动系统在奇点(0,0)附近可能出现的轨线结构都拓扑等价于上述 9 种之一.

这个结果表明，尽管(4.14)的扰动系统有无穷多个，并且可以带有任意多个参数，但可能出现的各种轨线结构，仅用一个特定的扰动系统(4.15)就可以完全展现出来. 在向量场的分支理论中，通常把奇异向量场的扰动叫作它的一个**开折**(unfolding)，而把具有上述性质的扰动系统(4.15)叫作原系统(4.14)的一个**普适开折**(universal unfolding). 一般而言，判断一个奇异向量场是否存

在普适开折，并且在它存在时具体找出普适开折，都是十分困难的问题．应该说，在这方面的研究还处于开始阶段．

上面的例子说明，只有从变动参数的观点，才能更好地把握系统的轨线结构．值得指出的是，这种观点有深刻的实际背景．事实上，在把实际问题转化为微分方程的过程中，常常要进行简化和近似，方程中的某些系数和相关的初值条件也常常要通过测量得到，从而不可避免地存在误差．因此，我们的研究就不应该局限于一个孤立的方程，而应着眼于包含这个方程在内并与之"邻近"的一族方程，例如依赖于小参数的系统族．这就产生了一个至关重要的问题：当参数变动时，系统是结构稳定的，还是发生分支现象？如果发生分支现象，它的规律是什么？

在本节中所介绍的分支现象，都是最简单的情形；由于分支而产生的闭轨，也都只有一条．实际上可能出现更复杂的情形．特别是当相空间或参数空间的维数 >2 时，寻找分支曲面和确定系统的拓扑结构都是不容易的．有兴趣的读者可以参考专著[17]—[19]等．

第九章　边值问题

在前几章中我们已相当详细地讨论了常微分方程的初值问题及其解法. 另外，我们也接触到所谓微分方程的边值问题，例如悬链线问题（第五章的 §1）. 一般而言，边值问题的解不一定存在；如果存在，也不一定唯一. 因此，边值问题的理论不象初值问题那样了然.

本章将讨论某些二阶微分方程的边值问题，而以斯托姆-刘维尔边值问题为重点，因为它在数学物理中有重要的应用.

§1.　斯托姆比较定理

斯托姆（Sturm，1803－1855）是在微分方程研究中最早使用定性方法的先驱者之一. 如我们在上一章所看到的，这种定性方法的主要特点是不仰赖于对微分方程的求解，而只凭方程本身的一些特征来确定解的有关性质，例如解的变号和周期性等.

我们讨论二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (1.1)$$

其中系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 J 上是连续的.

引理 1　齐次线性微分方程（1.1）的任何非零解在区间 J 内的零点都是孤立的.

证明　任给方程（1.1）的一个非零解

$$y = \varphi(x),\quad (x \in J).$$

假设它有一个非孤立的零点 $x_0 \in J$. 因此，在 J 内 $y = \varphi(x)$ 有一串零点 x_n，$(n = 1, 2, \cdots)$，$x_n \neq x_0$，使得当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$.

注意，$\varphi(x_0) = 0$ 和 $\varphi(x_n) = 0$，$(n = 1, 2, \cdots)$. 因此，我们可以

推出

$$\varphi'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

这就是说,非零解 $y = \varphi(x)$ 满足初值条件

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0. \tag{1.2}$$

然而,我们已知初值问题(1.1)+(1.2)有零解. 因此,根据解的唯一性,$y = \varphi(x)$ 就是零解. 这是一个矛盾. 所以非零解 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 内的零点必是孤立的. ▌

现在,设 $y = \varphi(x)$ 是齐次线性方程(1.1)的一个非零解,而且设 $x_1 \in J$ 是它的一个零点. 根据上面的引理得知,x_1 是一个孤立的零点. 这样,我们可以考虑 $y = \varphi(x)$ 在 x_1 的左(或右)边距 x_1 最近的那个零点 $x_2 < x_1$(或 $x_2 > x_1$)[如果有的话]. 注意,在 x_1 和 x_2 之间 $y = \varphi(x)$ 没有别的零点,我们称 x_1 和 x_2 为二个**相邻的零点**.

下面的一些定理最早是由斯托姆采用定性方法证明的. 这种简单的思想后来发展成为微分方程的近代定性理论(见第八章).

定理 1 设 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 是齐次线性方程(1.1)的两个非零解. 则下述结论成立:

1) 它们是线性相关的,当且仅当它们有相同的零点;

2) 它们是线性无关的,当且仅当它们的零点是互相交错的.

证明 首先,设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性相关的,则有

$$\varphi_2(x) = c\varphi_1(x), \quad (x \in J)$$

其中常数 $c \neq 0$. 由此可见,它们有相同的零点.

反之,设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 有一个相同的零点 $x_0 \in J$,则它们的朗斯基行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

在 $x = x_0$ 处的值 $W(x_0) = 0$,从而可由刘维尔公式推出 $W(x) \equiv 0$, $(x \in J)$. 所以 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性相关的.

其次,设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 线性无关. 则它们没有相同的零点.

设 x_1 和 x_2 是 $\varphi_1(x)$ 的二个相邻的零点，则不妨设

$$\varphi_1(x) > 0, \quad (x_1 < x < x_2),$$

（否则，只要以 $-\varphi_1(x)$ 替换 $\varphi_1(x)$）. 由此不难推出

$$\varphi_1'(x_1) \geqslant 0, \quad \varphi_1'(x_2) \leqslant 0.$$

因为 $y = \varphi_1(x)$ 是非零解，所以我们推得

$$\varphi_1'(x_1) > 0, \quad \varphi_1'(x_2) < 0. \tag{1.3}$$

因为 $\varphi_2(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 没有相同的零点，所以 x_1 和 x_2 都不是 $\varphi_2(x)$ 的零点，即

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) \neq 0.$$

现在假设 $\varphi_2(x_1)$ 和 $\varphi_2(x_2)$ 是同号的，即

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) > 0. \tag{1.4}$$

另一方面，由于 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$ 在区间 J 上不等于零，所以我们有

$$W(x_1)W(x_2) > 0. \tag{1.5}$$

易知

$$W(x_1) = -\varphi_2(x_1)\varphi_1'(x_1), \quad W(x_2) = -\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_2).$$

因此，不等式(1.5)蕴含

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0.$$

再利用(1.4)，就推出

$$\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0.$$

但是，这与(1.3)是矛盾的.

因此，$\varphi_2(x_1)$ 和 $\varphi_2(x_2)$ 是异号的. 由此推出 $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点 $\bar{x}_1(x_1 < \bar{x}_1 < x_2)$. 如果 $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间有两个零点 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$，那么用以上相同的论证可以推出，$\varphi_1(x)$ 将在 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 之间（从而在 x_1 和 x_2 之间）还至少有一个零点. 这与 x_1 和 x_2 是 $\varphi_1(x)$ 的二个相邻的零点是矛盾的. 所以 $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间有并且只有一个零点.

同样可证，$\varphi_1(x)$ 在 $\varphi_2(x)$ 的任何二个相邻零点之间有并且只有一个零点.

这就证明了 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的零点是互相交错的.

反之,设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的零点是互相交错的.因此,它们没有相同的零点,从而是线性无关的.

总结上面的论证,定理 1 得证. ▌

以下就是有名的斯托姆比较定理.

定理 2 设有二个齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1.6}$$

和

$$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1.7}$$

这里系数函数 $p(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 在区间 J 上是连续的,而且假设不等式

$$R(x) \geqslant Q(x), \quad (x \in J) \tag{1.8}$$

成立. 又设 $y = \varphi(x)$ 是方程(1.6)的一个非零解,而且 x_1 和 x_2 是它的二个相邻的零点. 则方程(1.7)的任何非零解 $y = \psi(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点 x_0 (这里所说的 x_0 在 x_1 和 x_2 之间的含义为 $x_0 \in [x_1, x_2]$).

证明 首先,我们注意 $\varphi(x_1) = 0$ 和 $\varphi(x_2) = 0$,而且不妨设 $\varphi(x) > 0$, $(x_1 < x < x_2)$. 由此可推出

$$\varphi'(x_1) > 0, \quad \varphi'(x_2) < 0. \tag{1.9}$$

要证:$y = \psi(x)$ 在区间 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上至少有一个零点. 假设这个结论不真,那么不妨设

$$\psi(x) > 0, \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2). \tag{1.10}$$

另一方面,当 $x \in J$ 时,我们有

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + Q(x)\varphi(x) = 0,$$

和

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + R(x)\psi(x) = 0.$$

然后,用 $\psi(x)$ 乘第一式,再减去用 $\varphi(x)$ 乘第二式,并且令

$$v(x) = \psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x),$$

就得到

$$v'(x)+p(x)v(x)=[R(x)-Q(x)]\varphi(x)\psi(x).$$

再利用条件(1.8)以及上述有关 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的性质，推得

$$[R(x)-Q(x)]\varphi(x)\psi(x)\geqslant 0,\quad (x_1<x<x_2).$$

所以我们有不等式

$$v'(x)+p(x)v(x)\geqslant 0,\quad (x_1<x<x_2),$$

它等价于不等式

$$e^{\int_{x_1}^{x}p(x)dx}[v'(x)+p(x)v(x)]\geqslant 0,\quad (x_1<x<x_2),$$

亦即

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int_{x_1}^{x}p(x)dx}v(x)\right]\geqslant 0,\quad (x_1<x<x_2).$$

因此，可以利用函数的单调性质推出

$$e^{\int_{x_1}^{x_2}p(x)dx}v(x_2)\geqslant v(x_1).\tag{1.11}$$

另一方面，由 $v(x)$ 的表达式可以看到

$$v(x_1)=\psi(x_1)\varphi'(x_1),\quad v(x_2)=\psi(x_2)\varphi'(x_2),$$

所以利用(1.9)和(1.10)可知

$$v(x_1)>0,\quad v(x_2)<0.$$

但是，这与不等式(1.11)是矛盾的．这样，我们就证明了 $y=\psi(x)$ 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上至少有一个零点．▌

现在，设 $y=\varphi(x)$ 是齐次线性微分方程(1.1)的一个非零解．若 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上最多只有一个零点，则称它在 J 上是**非振动的**；否则，称它在 J 上是**振动的**．如果 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上有无限个零点，则称它在 J 上是**无限振动的**．

利用上述比较定理，可以得到下面的有关解是否振动的简单判别法．

判别法 1 设齐次线性微分方程(1.1)中的系数函数

$$q(x)\leqslant 0,\quad (x\in J)$$

则它的一切非零解都是非振动的．

事实上，我们可以对方程(1.1)和方程

$$y'' + p(x)y' = 0 \tag{1.12}$$

进行比较. 显然,(1.12) 有非零解

$$y = \psi(x) \equiv 1, \quad (x \in J).$$

如果方程(1.1) 的非零解 $y = \varphi(x)$ 在 J 上至少有二个不同的零点 x_1 和 x_2,那么根据上面的比较定理就会推出方程(1.12) 的非零解 $y = 1$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点. 这是荒谬的. 因此,$y = \varphi(x)$ 在 J 上最多只有一个零点.

判别法 2 设微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0, \tag{1.13}$$

其中 $Q(x)$ 在区间 $a \leqslant x < \infty$ 上是连续的,而且满足不等式

$$Q(x) \geqslant m > 0, \quad (m \text{ 是常数}).$$

则微分方程(1.13) 的任何非零解 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上是无限振动的;而且它的任何二个相邻零点的间距不大于常数 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

事实上,我们只要证明不可能有长度超过 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ 的区间

$$I = [a_1, a_2],$$

使得 $y = \varphi(x)$ 在 I 上没有零点.

假如不然. 则有

$$\varphi(x) \neq 0, \quad (a_1 \leqslant x \leqslant a_2). \tag{1.14}$$

现在,对方程(1.13) 和方程

$$y'' + my = 0$$

进行比较. 易知后一方程有非零解

$$y = \sin[\sqrt{m}(x - a_1)],$$

而且它在区间 I 内至少有二个零点

$$x_1 = a_1 \quad \text{和} \quad x_2 = a_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ (< a_2).$$

因此,根据定理 2 推出方程(1.13) 的非零解 $y = \varphi(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间(从而在 a_1 和 a_2 之间)至少有一个零点. 但这与(1.14) 是矛盾

的. 因此,我们得到所需的结论.

注意,如果只假定

$$Q(x) > 0, \quad (a \leqslant x < \infty),$$

那么上述判别法 2 的结论可以不成立. 例如,微分方程

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0, \quad (1 \leqslant x < \infty)$$

的非零解

$$y = \sqrt{x}\,(C_1 + C_2 \ln x)$$

在区间 $1 \leqslant x < \infty$ 上最多有一个零点,其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

习 题 9-1

1. 如果在定理 2 中假设

$$R(x) > Q(x), \quad (x \in J),$$

则定理的结论可以加强到: $x_1 < x_0 < x_2$.

2. 如果微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0$$

中的系数函数 $Q(x)$ 满足不等式

$$Q(x) \leqslant M, \quad (a \leqslant x < \infty),$$

其中常数 $M > 0$. 则它的任何非零解 $y = \varphi(x)$ 的相邻零点的间距不小于常数 $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

3. 利用定理 2 证明: 贝塞尔函数 $J_n(x)$ 和诺曼函数 $Y_n(x)$ 都有无穷多个零点,而且它们各自相邻零点的间距当 $x \to \infty$ 时趋于 π.

*4. 设微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)x = 0,$$

其中 $P(t)$ 是 t 的连续的 2π 周期函数,而且满足

$$n^2 < P(t) < (n+1)^2,$$

这里 n 是一个非负的整数. 则上述方程的任何非零解都不是 2π 周期的.

5. 利用定理 2 证明:齐次线性微分方程(1.1)的任何二个线性无关的解的零点是互相交错的.

§2. S-L 边值问题的特征值

在进入一般性的讨论之前，我们先举一个具体的例子.

【例 1】 杆的弯曲问题：设有一根杆，以铰链固定于一端 $x=l$，而另一端 $x=0$ 则以支承固定（参见图 9-1）. 设杆受到一轴向载荷 P 的作用. 试讨论此杆可能出现的弯曲状态.

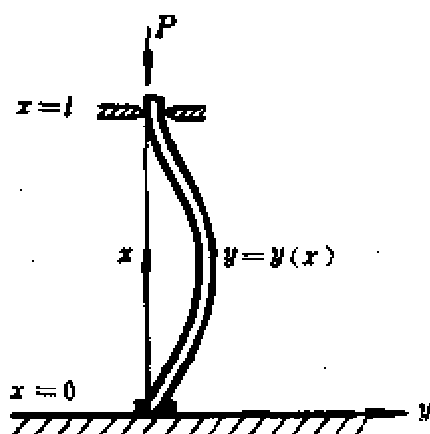


图 9-1

设杆的中心轴线为 $y=y(x)$. 则由力学实验可知，杆在 x 点的弯曲度 $y''(x)$ 与力矩 $Py(x)$ 成正比，即

$$-IEy''(x)=Py(x),$$

其中 $E=E(x)$ 是杨氏模数，而 $I=I(x)$ 为惯性矩. 令

$$\lambda=P,\quad Q(x)=\frac{1}{IE}.$$

则上述力学定理可以写成如下的微分方程

$$y''+\lambda Q(x)y=0, \tag{2.1}$$

其中 λ 代表压力参数，而函数 $Q(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant l$ 上是连续的. 另外，$y=y(x)$ 显然满足边值条件

$$y(0)=0,\quad y(l)=0. \tag{2.2}$$

所以研究杆的弯曲问题转化为求解边值问题(2.1) + (2.2). 显然，这边值问题有零解

$$y(x)=0,\quad (0\leqslant x\leqslant l),$$

它对应于杆的不弯曲状态. 而杆的弯曲状态对应于这边值问题的非零解. 利用力学直观可知，当压力参数 λ 不大时，杆不会弯曲，即边值问题(2.1) + (2.2) 没有非零解；而当 λ 适当加大时，杆就会

弯曲，即上述边值问题有非零解．这些结论在力学上似乎是显然的，但在数学上并不明显．本节的目的就是用数学方法更确切地揭露有关边值问题的一些力学现象．

我们考虑比较一般的二阶齐次线性微分方程

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \tag{2.3}$$

其中 λ 是一个参数，系数函数 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是连续的，$p(x)$ 是可微的，而且 $p(x) > 0$ 和 $r(x) > 0$．另外，设边值条件

$$Ky(a) + Ly'(a) = 0, \quad My(b) + Ny'(b) = 0, \tag{2.4}$$

其中常数 K，L，M 和 N 满足条件

$$K^2 + L^2 > 0, \quad M^2 + N^2 > 0.$$

上述形式的边值问题(2.3) + (2.4) 通常称为斯托姆 - 刘维尔边值问题（简称 S-L 边值问题）．注意，在例 1 中所说的杆的弯曲问题(2.1) + (2.2) 就是 S-L 边值问题的一个实例．

设当 $\lambda = \lambda_0$ 时边值问题(2.3) + (2.4) 有非零解 $y = \varphi_0(x)$．则称 λ_0 为这边值问题的**特征值**，而称 $y = \varphi_0(x)$ 为相应的**特征函数**．注意，若 $y = \varphi_0(x)$ 是相应于特征值 λ_0 的特征函数，则对于任何常数 $C \neq 0$，$y = C\varphi_0(x)$ 仍是相应的特征函数．

【例 2】　试求边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & (2.5) \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 & (2.6) \end{cases}$$

的特征值和相应的特征函数（这里设常数 $l > 0$）．

解　当 $\lambda \leqslant 0$ 时，由上节的判别法 1 可知方程(2.5)的任何非零解都不是振动的，从而它不可能满足边条件(2.6)．所以一切负的或等于零的常数 λ 都不是这边值问题的特征值．

当 $\lambda > 0$ 时，微分方程(2.5)的通解为

$$y = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

设它是一个非零解，则常数 C_1 和 C_2 不可能全等于零．利用边值条件(2.6)，我们得到

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(l) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,l + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0, \end{cases}$$

由此推出

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

因此,我们有 $\sqrt{\lambda}\,l = n\pi$,亦即

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

为所求的特征值,而相应的特征函数为

$$y = \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{2.7}$$

注意,上述特征值 $\lambda_n \to \infty$(当 $n \to \infty$),而且由傅氏级数理论知道,特征函数系(2.7)在区间$[0,l]$上组成一个完全的正交函数系. 因此,我们可以在区间$[0,l]$上把一般满足狄氏条件的函数 $f(x)$ 展开成傅氏级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中傅氏系数

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad (n = 1,2,\cdots). \quad ▌$$

以下我们的目的是要把例 2 的这些结论推广到一般的 S-L 边值问题(2.3)+(2.4),从而也推广了一般傅氏级数的理论及其应用的范围.

为了形式上的简洁,我们只要作适当的变换(见本节习题 3),可以把方程(2.3)化成如下形式

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0, \tag{2.8}$$

其中函数 $q(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,而且把边值条件(2.4)化成

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0, \tag{2.9}$$

这里规定常数 α 和 β 满足不等式: $0 \leqslant \alpha < \pi$, $0 < \beta \leqslant \pi$.

现在,设 $y=\varphi(x,\lambda)$ 是微分方程(2.8)的解,而且它满足初值条件

$$\varphi(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha. \tag{2.10}$$

易知这样的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 是存在和唯一的,而且它是一个非零解.显然,$y=\varphi(x,\lambda)$ 满足边值条件(2.9)的第一式.一般说来,它不一定再满足第二式.问题是如何确定 λ,使得上述 $y=\varphi(x,\lambda)$ 也满足(2.9)中的第二式.因此,这 λ 就是特征值,而且 $y=\varphi(x,\lambda)$ 为相应的特征函数.

我们采用极坐标.令

$$\varphi(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda),\quad \varphi'(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda),$$

其中

$$\begin{cases}\rho(x,\lambda)=\sqrt{[\varphi(x,\lambda)]^2+[\varphi'(x,\lambda)]^2}\ (>0),\\ \theta(x,\lambda)=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x,\lambda)}{\varphi'(x,\lambda)},\quad (0\leqslant x\leqslant 1).\end{cases}$$

由于 $y=\varphi(x,\lambda)$ 满足初值条件(2.10)(从而满足边条件(2.9)中第一式),我们有

$$\theta(0,\lambda)=\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\alpha+j\pi, \tag{2.11}$$

这里 j 是某个整数.欲使 $y=\varphi(x,\lambda)$ 也满足边条件(2.9)中的第二式,只要使 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 满足条件

$$\theta(1,\lambda)=\beta+k\pi, \tag{2.12}$$

这里 k 是某个整数.这就是说,满足这关系式(2.12)的 $\lambda=\lambda_k$ 就是所求的特征值,而 $y=\varphi(x,\lambda_k)$ 为相应的特征函数.

因此,我们只需讨论方程(2.12)的求根问题.

首先,可以直接推导 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 满足微分方程

$$\theta'=\cos^2\theta+[\lambda+q(x)]\sin^2\theta, \tag{2.13}$$

而且为了确定起见,在(2.11)中不妨取 $j=0$,亦即 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 满足初值条件

$$\theta(0,\lambda)=\alpha. \tag{2.14}$$

这样，$\theta=\theta(x,\lambda)$ 是初值问题(2.13)＋(2.14)的唯一解. 易知，$\theta=\theta(x,\lambda)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上存在，而且对参数 λ 是连续可微的.

引理 2 令 $\omega(\lambda)=\theta(1,\lambda)$. 则函数 $\omega(\lambda)$ 在区间 $-\infty<\lambda<\infty$ 上是连续的，而且是严格上升的.

证明 由(2.13)可以推出它关于 λ 的变分方程为

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=[\lambda+q(x)-1]\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\sin^2\theta, \qquad (2.15)$$

又由(2.14)可知

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(0,\lambda)=0. \qquad (2.16)$$

注意，方程(2.15)关于 $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$ 是一阶线性的. 因此，再利用初值条件(2.16)，我们得到

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(x,\lambda)=\int_0^x e^{\int_t^x E(s,\lambda)ds}\sin^2\theta(t,\lambda)dt,$$

其中

$$E(s,\lambda)=[\lambda+q(s)-1]\sin 2\theta(s,\lambda).$$

易知 $\sin^2\theta(x,\lambda)\not\equiv 0$, $(0\leqslant x\leqslant 1)$. 因此，由上式可见

$$\omega'(\lambda)=\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(1,\lambda)>0,$$

它给出所需结论. ▌

引理 3 当 $-\infty<\lambda<\infty$ 时，$\omega(\lambda)>0$，并且

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\omega(\lambda)=0.$$

证明 首先，由于 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 是初值问题(2.13)＋(2.14)的解，我们可以找到正数 $x_0\leqslant 1$，使得

$$\theta(x,\lambda)>0, \quad 只要 \quad 0<x\leqslant x_0. \qquad (2.17)$$

事实上，当 $\alpha>0$ 时，这个结论可直接由(2.14)得到；而当 $\alpha=0$ 时，则由(2.13)和(2.14)推出

$$\theta'(0,\lambda)=1,$$

从而同样可得(2.17).

其次，要证不等式(2.17)在区间 $0<x\leqslant 1$ 上也成立.

假如不然，则由(2.17)可知，存在正数 $x_1(x_0<x_1\leqslant 1)$，使得

$$\theta(x,\lambda)>0,\quad \text{只要}\quad 0<x<x_1,$$

但是

$$\theta(x_1,\lambda)=0.$$

由此就推出

$$\theta'(x_1,\lambda)\leqslant 0.$$

另一方面，再由(2.13)得知

$$\theta'(x_1,\lambda)=1.$$

这个矛盾证明了不等式(2.17)在区间 $0<x\leqslant 1$ 上也成立.

因此，我们特别有

$$\omega(\lambda)=\theta(1,\lambda)>0,\quad (-\infty<\lambda<\infty).$$

现在任给充分小的常数 $\varepsilon>0$ $\left(\varepsilon<\frac{\pi}{4}\right.$ 和 $\left.\varepsilon<\pi-\alpha\right)$，且令

$$h^2=\frac{1+\pi-2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon},\quad M=\max[q(x):\ 0\leqslant x\leqslant 1].$$

则当 $\lambda<-h^2-M$ 时，我们有

$$\lambda+q(x)<-h^2,\ (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{2.18}$$

在 (x,θ) 平面上，我们取两点 $A(0,\pi-\varepsilon)$ 和 $B(1,\varepsilon)$. 则由于(2.14)和 $\alpha<\pi-\varepsilon$，就可以找到正数 $\bar{x}_0\leqslant 1$，使得当 $0<x\leqslant\bar{x}_0$ 时积分曲线 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 在直线 AB 的下侧（见图 9-2).

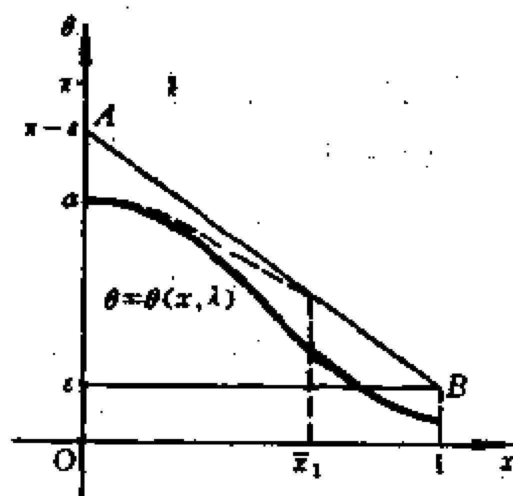


图 9-2

如果积分曲线 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 与直线 AB 第一次相交于 $x=\bar{x}_1$，则斜率 $\theta'(\bar{x}_1,\lambda)\geqslant$ 直线 AB 的斜率 $K=2\varepsilon-\pi$. 然而，由(2.13)和(2.18)，我们有

$$\theta'(\bar{x}_1,\lambda) < 1 - h^2\sin^2\varepsilon = 2\varepsilon - \pi.$$

这是矛盾的. 因此,积分曲线 $\theta = \theta(x,\lambda)$ 不可能与直线 AB 相交,从而它必须在直线 AB 的下侧. 这就证明了,当 $\lambda < -h^2 - M$ 时,我们有

$$\omega(\lambda) = \theta(1,\lambda) < \varepsilon.$$

注意,当 $h^2 \to \infty$ 时,我们有

$$\lambda \to -\infty \quad \text{和} \quad \varepsilon \to 0.$$

因此,引理 3 得证. ▌

引理 4 当 $\lambda \to \infty$ 时, $\omega(\lambda) \to \infty$.

证明 显然,对于任意给定的充分大常数 $N > 0$,可以找到常数 $K > 0$,使得只要 $\lambda > K$,就有

$$\lambda + q(x) > N^2, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

因此,由(2.13)我们有

$$\theta' \geqslant \cos^2\theta + N^2\sin^2\theta > 0,$$

从而

$$\frac{\theta'}{\cos^2\theta + N^2\sin^2\theta} \geqslant 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

然后,在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上积分此不等式,并注意 $\theta(0,\lambda) = \alpha$ 和 $\theta(1,\lambda) = \omega(\lambda)$, 我们得到

$$\int_0^1 \frac{\theta'}{\cos^2\theta + N^2\sin^2\theta}dx = \int_\alpha^{\omega(\lambda)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta + N^2\sin^2\theta} \geqslant 1. \quad (2.19)$$

假设当 $\lambda \to \infty$ 时 $\omega(\lambda)$ 是有界的. 令

$$\omega(\lambda) < L, \quad (\lambda \gg 1),$$

其中常数 $L > 0$. 则由(2.19)推出

$$\int_0^L \frac{d\theta}{\cos^2\theta + N^2\sin^2\theta} \geqslant 1,$$

亦即

$$\frac{1}{N}\mathrm{arctg}(N\mathrm{tg}L) \geqslant 1.$$

从而当 $N \to \infty$ 时这个不等式的左端趋于 0. 这是矛盾的. 因此,

当 $\lambda\to\infty$ 时 $\omega(\lambda)$ 是无界的. 由于 $\omega(\lambda)$ 对 λ 是单调上升的，所以引理 4 成立. ▌

根据上面引理 2 — 引理 4 的结论，我们得知，对于任何整数 k $(k\geqslant 0)$，方程(2.12)，亦即

$$\theta(1,\lambda)=\beta+k\pi$$

有并且只有一个(简单的)根 $\lambda=\lambda_k$，而且当 $k\to\infty$ 时有 $\lambda_k\to\infty$. 注意，这些 λ_k 都是上面边值问题(2.8) + (2.9) 的特征值.

最后，我们把上述结论总结成下面的特征值存在定理.

定理 3 S-L 边值问题有无限多个(简单的)特征值，而且可把它们排列如下

$$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$$

其中

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty.$$

习　题　9-2

1. 求解下列边值问题：

(1)　$y''+\lambda y=0$；　$y(0)=0$，　$y'(1)=0$.

(2)　$y''+(\lambda+1)y=0$；　$y'(0)=0$，　$y'(1)=0$.

2. 证明边值问题

$$\begin{cases} x^2y''-xy'+\lambda y=0, & (1\leqslant x\leqslant 2);\\ y(1)=0, & y(2)=0\end{cases}$$

没有非零解(其中 λ 是实的参数). 这是否与上述定理 3 矛盾？

*3. 试把一般的 S-L 边值问题(2.3) + (2.4) 化成特殊形式的 S-L 边值问题(2.8) + (2.9).

§ 3.　特征函数系的正交性

为了方便，我们现在把上节的 S-L 边值问题(2.8) + (2.9) 重写如下

$$y'' + [\lambda + q(x)]y = 0, \tag{3.1}$$

和

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0, \tag{3.2}$$

其中 λ 是参数，而函数 $q(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上是连续的；又设常数 α 和 β 满足不等式

$$0 \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leqslant \pi.$$

根据上节特征值的存在定理可知，边值问题(3.1)＋(3.2)有可数无限多个特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

其中 $\lambda_n \to \infty$，当 $n \to \infty$.

因此，对应于每个特征值 λ_n，至少有一个特征函数 $\varphi(x, \lambda_n)$. 而且，设常数 $C \neq 0$，则 $C\varphi(x, \lambda_n)$ 也是对应于 λ_n 的特征函数. 这里自然会提出一个问题：对应于特征值 λ_n，除了特征函数 $C\varphi(x, \lambda_n)$ 外，是否还有别的(即与 $C\varphi(x, \lambda_n)$ 线性无关的)特征函数.

引理 5　对应于每个特征值，S-L 边值问题有且只有一个线性无关的特征函数.

证明　令 $\lambda = \lambda_n$ 是边值问题(3.1)＋(3.2)的任一特征值，我们已经知道上述 $y = \varphi(x, \lambda_n)$ 是相应的特征函数. 现在令 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是相应的两个特征函数. 因此，我们可利用(3.2)的第一式得到

$$\begin{cases} \varphi(0)\cos\alpha - \varphi'(0)\sin\alpha = 0, \\ \psi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0, \end{cases}$$

它蕴含系数行列式

$$\varphi(0)\psi'(0) - \psi(0)\varphi'(0) = 0,$$

即 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x = 0$ 处的值 $W(0) = 0$. 因此，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是方程(3.1)的二个线性相关的解. ▌

由此可见，除相差一个常数因子外，S-L 边值问题(3.1)＋(3.2)的全部特征函数为：

$$\varphi(x,\lambda_0),\ \varphi(x,\lambda_1),\ \cdots,\ \varphi(x,\lambda_n),\ \cdots$$

为了简便，以下令

$$\varphi_n(x)=\varphi(x,\lambda_n),\quad (n=0,1,2,\cdots).\tag{3.3}$$

引理 6 特征函数系(3.3)在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上组成一个正交系，即

$$\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq k;\\ \delta_k>0, & \text{当 } n=k.\end{cases}$$

证明 因为 $\varphi_k(x)$ 不恒等于零，所以

$$\delta_k=\int_0^1\varphi_k^2(x)dx>0.$$

而当 $n\neq k$ 时，我们有 $\lambda_n\neq\lambda_k$，而且

$$\begin{cases}\varphi_n''(x)+[\lambda_n+q(x)]\varphi_n(x)=0,\\ \varphi_k''(x)+[\lambda_k+q(x)]\varphi_k(x)=0,\end{cases}$$

$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

由此可以推出

$$(\lambda_n-\lambda_k)\varphi_n(x)\varphi_k(x)=\frac{d}{dx}[\varphi_n(x)\varphi_k'(x)-\varphi_n'(x)\varphi_k(x)],$$

它蕴含

$$\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=$$

$$\frac{[\varphi_n(1)\varphi_k'(1)-\varphi_n'(1)\varphi_k(1)]-[\varphi_n(0)\varphi_k'(0)-\varphi_n'(0)\varphi_k(0)]}{\lambda_n-\lambda_k}.$$

再利用边值条件

$$\begin{cases}\varphi_n(0)\cos\alpha-\varphi_n'(0)\sin\alpha=0,\\ \varphi_k(0)\cos\alpha-\varphi_k'(0)\sin\alpha=0,\end{cases}$$

就推出系数行列式

$$\varphi_n(0)\varphi_k'(0)-\varphi_n'(0)\varphi_k(0)=0.$$

同理可得

$$\varphi_n(1)\varphi_k'(1)-\varphi_n'(1)\varphi_k(1)=0.$$

因此，我们推得

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = 0, \quad (n \neq k).$$

引理 6 得证. ▌

引理 7 如果 $f(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上是黎曼可积的，而且满足

$$\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

那么 $f(x)$（除在少数点外）恒等于零.

证明较长，因此从略. ▌（有兴趣的读者可参考文献[2].）

这里我们对引理 7 的几何意义作一简单的类比：设 φ_1，φ_2，φ_3 是三维空间 R^3 的三个互相垂直的（非零）向量. 如果 f 是 R^3 中的向量而且数量积

$$(f, \varphi_n) = 0, \quad (n = 1,2,3),$$

那么 f 是一个零向量. 因此，φ_1，φ_2，φ_3 是 R^3 中的一个完全的正交系（基）. 注意，其中任何二个，例如 φ_1，φ_2，都是一个正交系，但不是完全的.

因此，引理 7 说明，特征函数系(3.3) 在黎曼可积的函数空间 $R[0,1]$ 中是一个完全的正交系. 类似于对完全的正交三角函数系，在区间 $[0,1]$ 上可以考虑可积函数 $f(x)$ 关于特征函数系(3.3) 的（广义）傅氏展开

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{3.4}$$

其中（广义）傅氏系数

$$a_n = \frac{1}{\delta_n}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx, \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

其中正数

$$\delta_n = \int_0^1 \varphi_n^2(x)dx.$$

而且还可以进一步证明下述结论.

定理 4 设函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上满足狄氏条件，则它的（广义）傅氏级数(3.4)收敛到它自己. ▌

上面的一些理论，如同三角级数一样，是数学物理方法的一个必要的基础.

【例 3】 试求边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & (3.5)\\ y(0)+y'(0)=0,\quad y(1)=0, & (3.6)\end{cases}$$

的特征值与相应的特征函数，并且讨论函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上关于该特征函数系的（广义）傅氏展开.

解 当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-R^2$, $(R>0)$. 则方程(3.5)的通解为

$$y=C_1e^{Rx}+C_2e^{-Rx}.$$

再利用边值条件(3.6)，我们得到

$$\begin{cases}(1+R)C_1+(1-R)C_2=0,\\ e^RC_1+e^{-R}C_2=0,\end{cases}\tag{3.7}$$

它的系数行列式为

$$\Delta(R)=(e^R+e^{-R})R-(e^R-e^{-R}).$$

因为 $\Delta'(R)=(e^R-e^{-R})R>0$ (当 $R>0$)，和 $\Delta(0)=0$，所以当 $R>0$ 时 $\Delta(R)>0$. 因此，由联立方程(3.7)推出

$$C_1=0,\quad C_2=0.$$

这就证明，边值问题(3.5)+(3.6)没有负的特征值.

当 $\lambda=0$ 时，方程(3.5)的通解为

$$y=C_1x+C_2.$$

再利用边值条件(3.6)，我们只得到

$$C_1+C_2=0.$$

取 $C_1=1$，则 $C_2=-1$. 因此，我们得到边值问题的一个非零解

$$y=\varphi_0(x)=x-1,\tag{3.8}$$

它是对应于特征值 $\lambda_0=0$ 的特征函数.

当 $\lambda>0$ 时，令 $\lambda=R^2$, $(R>0)$. 则方程(3.5)的通解为

$$y = C_1\cos Rx + C_2\sin Rx.$$

再利用边条件(3.6),我们有

$$\begin{cases} C_1 + C_2R = 0, \\ C_1\cos R + C_2\sin R = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

它的系数行列式为

$$\Delta(R) = \sin R - R\cos R.$$

因此,(3.9)关于(C_1,C_2)有非零解的充要条件为$\Delta(R) = 0$,即

$$R = \operatorname{tg} R, \quad (R > 0). \tag{3.10}$$

由简单的作图法可见,方程(3.10)有无限多个正根

$$0 < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \cdots$$

其中

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < R_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (n = 1,2,\cdots),$$

而且由图形不难得到近似公式

$$R_n \doteq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (\text{当 } n \gg 1).$$

因此,当$\lambda > 0$时,我们得到的特征值为

$$\lambda_n = R_n^2, \quad (n = 1,2,\cdots),$$

而且

$$\lambda_n \doteq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2, \quad (\text{当 } n \gg 1).$$

而相应的特征函数为

$$\varphi_n(x) = R_n\cos R_nx - \sin R_nx, \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{3.11}$$

联合(3.8)和(3.11),我们在区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上得到一个完全的正交特征函数系

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots \tag{3.12}$$

容易算出

$$\delta_0 = \int_0^1[\varphi_0(x)]^2dx = \int_0^1(x-1)^2dx = \frac{1}{3},$$

$$\delta_n = \int_0^1 [\varphi_n(x)]^2 dx = \int_0^1 [R_n \cos R_n x - \sin R_n x]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(R_n^2 - 1) + (R_n^2 + 1)\cos^2 R_n\Big] > 0.$$

（注意，当 $n \geqslant 1$ 时 $R_n > 1$）. 因此，设函数 $f(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上满足狄氏条件，则可以利用正交函数系(3.12)把它展开成（广义）傅氏级数，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

其中（广义）傅氏系数

$$a_n = \frac{1}{\delta_n}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad ▌$$

习 题 9-3

1. 求解边值问题：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(a) = 0, \quad y'(b) = 0, \end{cases}$$

其中 a 和 b 是常数 $(a < b)$，而 λ 是参数.

2. 求解周期性边值问题：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \end{cases}$$

并比较它与 S-L 边值问题的异同.

*3. 讨论非齐次方程的 S-L 边值问题：

$$\begin{cases} y'' + [\lambda + q(x)]y = f(x), \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

试证明：当 λ 不是相应齐次方程的 S-L 边值问题的特征值时，它有并且只有一个解；而当 λ 等于某个特征值 λ_m 时，它有解的充要条件为

$$\int_0^1 f(x)\varphi_m(x)dx = 0,$$

其中 $\varphi_m(x)$ 为相应于特征值 λ_m 的特征函数.

* § 4. 一个非线性边值问题的例子

本节将用一个具体的例子来说明，在某些情况下只作线性化处理是不够的. 因此，还要考虑非线性边值问题.

【例 4】 设在水平桌面上有一长度为 l 的均匀钢条，在二端施加大小为 $p>0$ 而方向相反的一对水平压力. 试研究钢条的弯曲.

解 显然，当压力 p 很小时钢条不会弯曲. 然而当压力 p 逐渐增大并超过某个临界压力 p_0 时，钢条就会弯曲，如图 9-3.

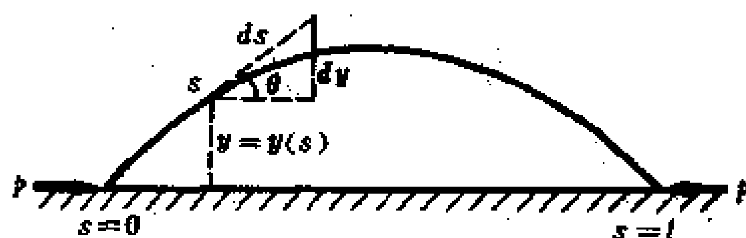


图 9-3

取钢条上任意一点，设它距左端点的(钢条) 弧长为 s，则令 s 为该点的参数坐标. 因此，左端点与右端点的坐标分别为 $s=0$ 与 $s=l$，而钢条中点的坐标为 $s=\frac{l}{2}$.

令钢条在 s 点离桌面的高度为 $y=y(s)$（注意，$y(s)\geqslant 0$），并且其切线的倾角为 $\theta=\theta(s)$. 则 $\frac{d\theta}{ds}$ 表示钢条在 s 点的弯曲率，而 py 表示在 s 点所受弯曲矩. 根据力学的弯曲定理，即在 s 点的弯曲率正比于在该点所受的弯曲矩，我们有

$$\frac{d\theta}{ds}=-kpy, \tag{4.1}$$

其中比例常数 $k>0$,右端的负号是由于 $\frac{d\theta}{ds}\leqslant 0$ 和 $kpy\geqslant 0$. 通常,令 $B=\frac{1}{k}$,它表示钢条的刚度.

设 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$,则由图 9-3 可见

$$\frac{dy}{ds}=\sin\theta.$$

因此,我们有

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\cos\theta\frac{d\theta}{ds}=\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\frac{d\theta}{ds}.$$

再由(4.1)推得钢条弯曲的方程为

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{py}{B}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=0, \tag{4.2}$$

它是一个非线性的微分方程.

另外,钢条的形状 $y=y(s)$ 应满足边值条件

$$y(0)=0,\quad y(l)=0. \tag{4.3}$$

因此,上述钢条的弯曲问题就转化成一个非线性的边值问题(4.2)+(4.3). 以下我们来求解钢条开始弯曲时的临界压力 p_0.

对于小弯曲,即当 $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\ll 1$ 时,我们近似地有

$$\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\doteq 1.$$

因此,可以把方程(4.2)线性化为

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{p}{B}y=0. \tag{4.4}$$

因为已知 $y(s)\geqslant 0$,所以不难推出,边值问题(4.3)+(4.4)当且仅当

$$p=p_0=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2B$$

时才有非零解

$$y = A\sin\frac{\pi s}{l}, \tag{4.5}$$

其中 $A > 0$ 是一个任意常数.

这样,根据线性化的结果,我们得到下述三个结论:

1) 当 $p < p_0$ 时,钢条不会弯曲;而当 $p = p_0$ 时钢条发生弯曲(即 p_0 为临界压力);

2) 当 $p = p_0$ 时,非零解(4.5)是不唯一的,亦即钢条的弯曲形状是不确定的;

3) 当 $p > p_0$ 时,钢条又不弯曲.

力学实验告诉我们,第一个结论是符合实际的,而第二结论,尤其是第三个结论是不符合事实的. 这说明了线性化方法有一定的局限性.

现在,我们来直接分析非线性微分方程(4.2). 令 $y = y(s)$ 是它的一个解,且满足初值条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = u_0 > 0. \tag{4.6}$$

显然, $y = y(s)$ 是边值问题(4.2) + (4.3) 的非零解当且仅当

$$y(l) = 0. \tag{4.7}$$

这样,我们只需适当选取 $u_0 > 0$,使得 $y = y(s)$ 满足条件(4.7). 为此,令

$$u = \frac{dy}{ds}.$$

则

$$\frac{d^2y}{ds^2} = u\frac{du}{dy}.$$

因此,方程(4.2)变成

$$\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{p}{B}ydy = 0, \quad (设\ u^2 \neq 1).$$

从而可得首次积分

$$-2\sqrt{1-u^2} + \frac{p}{B}y^2 = C. \tag{4.8}$$

利用初值条件(4.6),我们推出积分常数

$$C=-2\sqrt{1-u_0^2}.$$

显然,边值问题(4.2)+(4.3)的解 $y=y(s)$ 关于中点 $s=\frac{l}{2}$ 是对称的,而且 $y(\frac{l}{2})=m>0$ 是 $y=y(s)$ 的最大值. 因此,$y'(\frac{l}{2})=0$. 再利用(4.8),我们得到

$$-2+\frac{p}{B}m^2=-2\sqrt{1-u_0^2}. \tag{4.9}$$

另外,由(4.8)可解出 u,即得

$$\frac{dy}{ds}=\sqrt{1-\left(\frac{p}{2B}y^2-\frac{C}{2}\right)^2},\quad (0\leqslant s\leqslant\frac{l}{2}).$$

由此推出

$$s=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{2B}y^2-\frac{C}{2}\right)^2}},\quad (0\leqslant s\leqslant\frac{l}{2}),$$

它表示 $y=y(s)$ $(0\leqslant s\leqslant\frac{l}{2})$ 的反函数. 特别,当 $s=\frac{l}{2}$ 时,我们得到

$$\frac{l}{2}=\int_0^m\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{2B}y^2+\sqrt{1-u_0^2}\right)^2}}.$$

令 $\xi=1-\sqrt{1-u_0^2}$,则 $0<\xi<1$. 再令

$$t=\frac{p}{2B}y^2+\sqrt{1-u_0^2}.$$

则当 $y=0$ 时有 $t=1-\xi$; 而当 $y=m$ 时由(4.9)可知 $t=1$. 这样一来,上述积分就化为

$$\frac{l}{2}=\sqrt{\frac{B}{2p}}\int_{1-\xi}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{t+\xi-1}}.$$

由此解出

$$p=\left[\frac{1}{l}F(\xi)\right]^2B, \tag{4.10}$$

其中

$$F(\xi)=\sqrt{2}\int_{1-\xi}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{t-(1-\xi)}},$$

亦即

$$F(\xi)=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}\sqrt{2-(1-v)\xi}}.$$

不难看出，$F(\xi)$ 是 ξ $(0\leqslant\xi\leqslant 1)$ 的严格上升的连续函数. 因此，由(4.10)我们得到

$$\left[\frac{1}{l}F(0)\right]^2B<p<\left[\frac{1}{l}F(1)\right]^2B. \tag{4.11}$$

这不等式的左端表示钢条弯曲的临界压力

$$p_0=\left[\frac{1}{l}F(0)\right]^2B=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2B, \tag{4.12}$$

而右端表示钢条允许承受的最大压力 p_1. 只要压力 p 介于 p_0 和 p_1 之间，钢条就会弯曲. 而且对于给定的压力 p $(p_0<p<p_1)$，可由(4.10)唯一地确定 ξ，从而由 $\xi=1-\sqrt{1-u_0^2}$ 可唯一确定

$$u_0=\sqrt{\xi(2-\xi)}>0.$$

然后，由相应的初值条件(4.6)就唯一地确定了微分方程(4.2)的一个解 $y=y(s)$，它对应于钢条弯曲的形状. 这些结论比线性化所得的结果更符合实际. 注意，由非线性分析所得的临界压力 p_0 也正好等于由线性化处理所得的结果[见(4.12)]. ▌

一般而言，非线性分析虽然比线性分析优越，但是要困难得多. 因此，在实际应用中采用线性化方法往往也是一种出于无奈的妥协方案.

习 题 9-4

1. 试比较例1和例4的异同.

2. 证明上述积分 $F(\xi)$ 对 ξ $(0\leqslant\xi\leqslant 1)$ 是严格上升的连续函数，而且

$$F(0) = \pi \quad \text{和} \quad F(1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. 从而算出钢条允许承受的最大压力 p_0.

* §5. 周期边值问题

本节讨论二阶的微分方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = p(t) + \lambda f(t, x, \dot{x}), \tag{5.1}$$

其中 $\omega_0 > 0$ 是常数，λ 是小参数，$p(t)$ 是 t 的连续的 2π 周期函数，和 $f(t,x,\dot{x})$ 是 $t,x,\dot{x}$ 的连续函数，它对 t 是 2π 周期的，而对 x 和 $\dot{x}$ 是连续可微的. 这类方程在电讯和机械的振动理论中占有重要的地位. 一个令人关注的问题是关于它的有界振动，特别是 2π 周期振动(解)的存在性.

设 $x = x(t)$ 是方程(5.1)的一个 2π 周期解，则它自然满足下面的周期边值条件

$$x(0) = x(2\pi), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi). \tag{5.2}$$

反之，设 $x = x(t)$ 是方程(5.1)的一个解，而且它满足周期边值条件(5.2)，则可以证明这个解是 2π 周期的.

事实上，因为 $x = x(t)$ 是方程(5.1)的解，所以有恒等式

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \equiv p(t) + \lambda f(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

因为 $p(t)$ 和 $f(t,x,\dot{x})$ 对 t 是 2π 周期的，所以只要在上面的恒等式中用 $t + 2\pi$ 替换 t，我们就得到

$$\ddot{x}(t+2\pi) + \omega_0^2 x(t+2\pi) = p(t) + \lambda f(t, x(t+2\pi), \dot{x}(t+2\pi)).$$

这就是说，$x = \bar{x}(t) := x(t + 2\pi)$ 也是方程(5.1)的一个解，而且它满足初值条件

$$\bar{x}(0) = x(2\pi), \quad \bar{x}'(0) = x'(2\pi).$$

再利用周期边值条件(5.2)推出

$$\bar{x}(0) = x(0), \quad \bar{x}'(0) = x'(0).$$

亦即方程(5.1)有二个解 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$ 当 $t = 0$ 时具有相同的初值.

因此，根据解的唯一性定理，它们是恒同的，亦即 $x(t) \equiv \bar{x}(t)$. 这样，我们得到

$$x(t) \equiv x(t+2\pi),$$

即 $x = x(t)$ 是 2π 周期的.

由此可见，寻找微分方程(5.1)的 2π 周期解等价于求解周期边值问题(5.1) + (5.2).

先设

$$x = x(t, x_0, v_0, \lambda) \tag{5.3}$$

是微分方程(5.1)的解，而且它满足初值条件

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

易知，当 $|\lambda|$ 充分小时，解(5.3)在区间 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 上存在，而且根据解对初值和参数的可微性，它对 t, x_0, v_0, λ 是连续可微的.

由此可见，$x = x(t, x_0, v_0, \lambda)$ 是周期边值问题(5.1) + (5.2)的解，当且仅当初值 x_0, v_0 满足方程

$$\begin{cases} F(x_0, v_0, \lambda) := x(2\pi, x_0, v_0, \lambda) - x_0 = 0, \\ G(x_0, v_0, \lambda) := \dot{x}(2\pi, x_0, v_0, \lambda) - v_0 = 0. \end{cases} \tag{5.4}_\lambda$$

这样一来，只要能够由方程$(5.4)_\lambda$确定初值 $x_0 = x_0(\lambda)$ 和 $v_0 = v_0(\lambda)$，然后分别代入(5.3)，我们就得到微分方程(5.1)的一个 2π 周期解.

定理 5 设 $\omega_0 \neq$ 正整数. 则当 λ 是小参数时微分方程(5.1)有唯一的 2π 周期解.

证明 当 $\lambda = 0$ 时，利用常数变易法，我们可求得

$$x(t, x_0, v_0, 0) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t p(s)\sin\omega_0(t-s)ds.$$

因此，方程$(5.4)_0$变成一个关于 x_0 和 v_0 的线性联立方程组

$$\begin{cases} (\cos 2\pi\omega_0 - 1)x_0 + \dfrac{\sin 2\pi\omega_0}{\omega_0}v_0 = -\dfrac{1}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(s)\sin\omega_0(2\pi - s)ds, \\ (\omega_0 \sin 2\pi\omega_0)x_0 - (\cos 2\pi\omega_0 - 1)v_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} p(s)\cos\omega_0(2\pi - s)ds. \end{cases}$$

它的系数行列式

$$\Delta_0 = (\cos 2\pi\omega_0 - 1)^2 + (\sin 2\pi\omega_0)^2 \neq 0, \quad (\omega_0 \neq \text{整数}).$$

因此，方程(5.4)$_0$ 有唯一的解 $x_0 = \bar{x}_0$, $v_0 = \bar{v}_0$；亦即

$$\begin{cases} F(\bar{x}_0, \bar{v}_0, 0) = 0, \\ G(\bar{x}_0, \bar{v}_0, 0) = 0. \end{cases}$$

另外，易知当 $\lambda = 0$ 时，Jacobi 行列式

$$\frac{D(F,G)}{D(x_0, v_0)} = \Delta_0 \neq 0.$$

因此，利用隐函数定理，由方程(5.4)$_\lambda$ 可唯一确定连续函数

$$x_0 = x_0(\lambda), \quad v_0 = v_0(\lambda), \quad (|\lambda| \ll 1),$$

它们满足

$$x_0(0) = \bar{x}_0, \quad v_0(0) = \bar{v}_0.$$

这样一来，我们就得到微分方程(5.1)的一个 2π 周期解

$$x = x(t, \lambda) = x(t, x_0(\lambda), v_0(\lambda), \lambda),$$

而且当 $\lambda \to 0$ 时它趋于

$$x(t, 0) = \bar{x}_0 \cos\omega_0 t + \frac{\bar{v}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t p(s)\sin\omega_0(t-s)ds.$$

这就证明了我们的定理. ▌

这里须要指出，当 ω_0 为正整数或 λ 不是小参数时，关于微分方程(5.1)的 2π 周期解的存在性问题就不是如此简单了.

习题 9-5

1. 证明微分方程

$$\ddot{x} + 2x = 3\sin 2\pi t + \lambda x^3$$

当 λ 是小参数时至少有一个 1 周期解.

2. 证明微分方程

$$\ddot{x} + 2x = \lambda \sin 2\pi t + 5x^3$$

当 λ 是小参数时至少有一个 1 周期解.

3. 设微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (x \in R^n)$$

其中 $f(t,x)$ 对 $(t,x)\in R^{n+1}$ 是连续的，对 x 满足局部李氏条件，而且对 t 是 T 周期的. 试证明：这微分方程的解 $x=x(t)$ 是 T 周期的，当且仅当它满足边值条件

$$x(0)=x(T).$$

*4. 设微分方程

$$\ddot{x}+g(x)=p(t),$$

其中 $p(t)$ 是 t 的连续的 2π 周期函数，$g(x)$ 是 x 的连续可微函数，且满足条件

$$n^2<g'(x)<(n+1)^2,\quad(-\infty<x<\infty),$$

其中 n 是某个正整数. 试证明这微分方程的 2π 周期解（如果存在的话）是唯一的.

第十章 首次积分

在第五章的 §1 中，虽然没有明确给出首次积分的定义，但我们已用首次积分的方法求解了几个特殊类型的微分方程，并获得一种直观的理解：求解一个微分方程就是寻找它的首次积分，n 阶的微分方程应该有 n 个独立的首次积分；而且一旦能找到其中的 k 个，原来的 n 阶微分方程就可简化为一个 $n-k$ 阶的方程. 本章的目的就是要证明上述结果，它们构成首次积分的理论基础，也可看作是线性微分方程的一般理论在非线性微分方程中的推广. 特别要指出，首次积分的一般理论只在局部区域内成立. 关于大范围的首次积分，我们只在最后一节中作些简要的介绍.

§1. 首次积分的定义

在给出首次积分确切的定义之前，我们先再求解几个特殊的微分方程，从中体会首次积分的含义和作用.

【例 1】 求解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \tag{1.1}$$

解 如果把微分方程组(1.1)中的自变量 t 换为 $-t$，则它与第八章 §1 中例 1 的方程组完全相同. 因此，只要把那里的图 8-1 中轨线的方向反置，就可得到微分方程组(1.1)的相图. 下面，我们用寻找两个独立的首次积分的方法，来解这个方程组.

由微分方程组(1.1)可得

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

亦即

$$d(x^2+y^2)=-2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)dt.$$

这个微分方程关于变量 t 和 x^2+y^2 是可以分离的，因此不难求得它的积分

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}e^{2t}=C_1, \tag{1.2}$$

其中 C_1 是积分常数. 称(1.2)为微分方程组(1.1)的首次积分.

注意，首次积分(1.2)的左端 $V(x,y,t)$ 作为 x,y 和 t 的函数并不等于常数；从上面的推导可见，当 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 是微分方程组(1.1)的解时，$V(x,y,t)$ 等于常数 C_1，这里常数 C_1 应随解而异. 因为(1.1)是二阶方程组，一个首次积分，例如(1.2)，不足以完全确定它的解.

现在，再利用方程(1.1)可得

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=-(x^2+y^2),$$

亦即

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=-1.$$

由此即得另一个首次积分

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+t=C_2, \tag{1.3}$$

其中 C_2 是积分常数.

利用首次积分(1.2)和(1.3)，可以确定微分方程组(1.1)的通解. 为此，我们采用极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 这样由(1.2)和(1.3)推得

$$\left(1-\frac{1}{r^2}\right)e^{2t}=C_1,\quad \theta+t=C_2,$$

它蕴含

$$r=\frac{1}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}},\quad \theta=C_2-t.$$

因此，我们得到微分方程组(1.1)的通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}}, \\ y=\dfrac{\sin(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1e^{-2t}}}. \end{cases} \tag{1.4}$$

注意，当 $C_1=0$ 时，对于任意的常数 C_2，(1.4) 代表周期解

$$\begin{cases} x=\cos(C_2-t), \\ y=\sin(C_2-t), \end{cases}$$

它们在相平面(x,y)上的轨道是单位圆周

$$\Gamma:\qquad x^2+y^2=1,$$

其运动的方向为顺时针.

当$C_1<0$时，解(1.4)不是周期的，它的轨道在Γ的内部，而且当$t\to\infty$时盘旋趋于闭轨Γ，而当$t\to-\infty$时盘旋趋于原点. 注意，原点O是方程组(1.1)的零解在相平面上的轨迹(对应于$C_1=-\infty$).

当$C_1>0$时，解(1.4)也不是周期的，它的轨道在Γ的外部，而且当$t\to+\infty$时盘旋趋于闭轨Γ.

因此，闭轨Γ为微分方程组(1.1)的极限环(见第八章的§3)，它在相图中占据特殊的地位. ▌

【例 2】 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{du}{dt}=(\beta-\gamma)vw, \\ \beta\dfrac{dv}{dt}=(\gamma-\alpha)wu, \\ \gamma\dfrac{dw}{dt}=(\alpha-\beta)uv, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\alpha>\beta>\gamma>0$ 是给定的常数.

解 利用(1.5)的对称性推出

$$\alpha u\frac{du}{dt}+\beta v\frac{dv}{dt}+\gamma w\frac{dw}{dt}=0,$$

从而得到首次积分

$$\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2=C_1, \tag{1.6}$$

其中积分常数 $C_1\geqslant 0$. 注意,首次积分(1.6)在相空间(u,v,w)内代表一族椭球面 $E(C_1)$(当 $C_1=0$ 时相应椭球面蜕化成原点 O).

同样,我们有

$$\alpha^2 u\frac{du}{dt}+\beta^2 v\frac{dv}{dt}+\gamma^2 w\frac{dw}{dt}=0,$$

从而又得另一首次积分

$$\alpha^2u^2+\beta^2v^2+\gamma^2w^2=C_2, \tag{1.7}$$

其中积分常数 $C_2\geqslant 0$. 而首次积分(1.7)也代表一族椭球面 $F(C_2)$(当 $C_2=0$ 时相应椭球面也蜕化成原点 O).

有了首次积分(1.6)和(1.7),我们可以解出 u 和 v,并且代入方程(1.5)的第三式,就有

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\sqrt{(a+Aw^2)(b-Bw^2)}, \tag{1.8}$$

其中常数 a 和 b 依赖于 C_1 和 C_2,而常数

$$A=\frac{\gamma(\beta-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)}>0,\quad B=\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta(\alpha-\beta)}>0.$$

因为微分方程(1.8)是变量分离的,所以我们可得首次积分

$$\int\frac{dw}{\sqrt{(a+Aw^2)(b-Bw^2)}}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma}t=C_3, \tag{1.9}$$

其中 C_3 是积分常数.

因为方程(1.5)是三阶的,所以三个首次积分(1.6),(1.7)和(1.9)在理论上足以确定它的通解

$$u=\varphi(t,C_1,C_2,C_3),\quad v=\psi(t,C_1,C_2,C_3),\quad w=\chi(t,C_1,C_2,C_3).$$

但是,由于(1.9)中出现了椭圆积分,因此不可能具体写出上述通解的表达式.这样,也就不可能从通解得到有关解的具体性质.

虽然如此，我们可以利用首次积分(1.6)和(1.7)的几何意义来证明微分方程(1.5)的任何解都是周期的.

事实上，令

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t),\quad w=\chi(t) \tag{1.10}$$

为微分方程(1.5)满足初值条件

$$u(0)=u_0,\quad v(0)=v_0,\quad w(0)=w_0 \tag{1.11}$$

的解. 当 $u_0=v_0=w_0=0$ 时，则微分方程(1.5)的零解也满足初值条件(1.11). 因此，利用解的唯一性定理推出(1.10)就是方程的零解，它当然可以视作周期解的特例.

当 $u_0^2+v_0^2+w_0^2\neq 0$ 时，解(1.10)是一个非零解，它同时满足(1.6)和(1.7)，其中

$$\begin{cases} C_1=\alpha u_0^2+\beta v_0^2+\gamma w_0^2>0, \\ C_2=\alpha^2u_0^2+\beta^2v_0^2+\gamma^2w_0^2>0. \end{cases}$$

因此，解(1.10)在相空间内的轨线是椭球面 $E(C_1)$ 和 $F(C_2)$ 的一支交线 Γ_0. 显然，Γ_0 是一条闭轨. 由方程(1.5)可见，运动(1.10)在轨线 Γ_0 上的速度满足

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\geqslant C_0>0,\quad (t\in R^1).$$

由此可见，运动(1.10)从初始点(u_0,v_0,w_0)出发沿 Γ_0 运动，接着必定在某时刻 $t=T_0>0$ 时又回到出发点，亦即

$$\varphi(T_0)=u_0,\quad \psi(T_0)=v_0,\quad \chi(T_0)=w_0. \tag{1.12}$$

另一方面，由于微分方程(1.5)的右端不依赖于自变量 t，我们容易证明

$$u=\varphi(t+T_0),\quad v=\psi(t+T_0),\quad w=\chi(t+T_0) \tag{1.13}$$

也是方程(1.5)的解. 而且由(1.12)可见，解(1.13)也满足初值条件(1.11). 因此，利用解的唯一性定理推出，解(1.13)和(1.10)是恒同的，亦即

$$\varphi(t+T_0)\equiv\varphi(t),\quad \psi(t+T_0)\equiv\psi(t),\quad \chi(t+T_0)\equiv\chi(t).$$

这就证明了(1.10)是一个以 T_0 为周期的周期解. ▌

现在，我们考虑一般的 n 阶微分方程

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n), \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.14}$$

其中右端函数 $f_1, \cdots, f_n$ 在某个区域 $D \subset R^{n+1}$ 内对 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 是连续的，而且对 $y_1, \cdots, y_n$ 是连续可微的.

定义 设函数 $V = V(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在 D 的某一子区域 G 内连续，而且对 $x, y_1, \cdots, y_n$ 是连续可微的. 又设 $V(x, y_1, \cdots, y_n)$ 不是常数，但沿着微分方程(1.14)在区域 G 内的任一积分曲线

$$\Gamma: \quad y_1 = y_1(x), \ \cdots, \ y_n = y_n(x), \quad (x \in J)$$

函数 V 取常值；亦即

$$V(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) = \text{常数}, \quad (x \in J)$$

或当 $(x, y_1, \cdots, y_n) \in \Gamma$ 时，有

$$V(x, y_1, \cdots, y_n) = \text{常数},$$

这里的常数随积分曲线 Γ 而定. 则称

$$V(x, y_1, \cdots, y_n) = C \tag{1.15}$$

为微分方程(1.14)在区域 G 内的**首次积分**，其中 C 是一个任意常数. 有时也简称这里的函数 $V(x, y_1, \cdots, y_n)$ 为首次积分.

例如，(1.2)和(1.3)都是微分方程(1.1)在某个区域 G_1 内的首次积分. 注意，这里对区域 G_1 的限制，是要求首次积分(1.2)和(1.3)必须是单值的连续可微函数. 因此，区域 G_1 不能包含原点 O，而且它也不能有围绕原点 O 的环路.

而(1.6)，(1.7)和(1.9)都是微分方程(1.5)的首次积分.

【附注】 对于高阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1.16}$$

只要令

$$y_1 = y, \ y_2 = y', \ \cdots, \ y_n = y^{(n-1)},$$

就可以把它化成一个与其等价的微分方程组. 因此，首次积分的定义可以自然地移植到高阶微分方程(1.16)，而其首次积分的一般形式可写成

$$V(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=C.$$

例如，设二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2\sin x=0,\quad (\text{常数 } a>0).$$

用 $\frac{dx}{dt}$ 乘方程的两端，即得

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+a^2\sin x\frac{dx}{dt}=0.$$

然后积分，我们得到一个首次积分

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-a^2\cos x=C.$$

§ 2.　首次积分的性质

为了方便，我们把微分方程(1.14)重写如下

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n),\quad (i=1,\cdots,n)\tag{2.1}$$

其中 $f_1,\cdots,f_n$ 在某个区域 G_1 内对 $(x,y_1,\cdots,y_n)$ 是连续的，而且对 $(y_1,\cdots,y_n)$ 是连续可微的.

根据首次积分的定义，为了判别函数 $V(x,y_1,\cdots,y_n)$ 是否是微分方程(2.1)在区域 G_1 内的首次积分，我们须要知道方程(2.1)在 G_1 内的所有积分曲线. 这在实际应用上是有困难的. 下述定理避免了这一缺点，为我们提供了一个有效的判别法.

定理 1　设函数 $\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)$ 在区域 G_1 内是连续可微的，而且它不是常数. 则

$$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)=C\tag{2.2}$$

是微分方程(2.1)在区域 G_1 内的首次积分的充要条件为：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}f_n=0\tag{2.3}$$

是关于变量 $(x,y_1,\cdots,y_n)\in G_1$ 的一个恒等式.

证明　先证必要性：设(2.2)是微分方程(2.1)在区域 G_1 的

一个首次积分. 又设

$$\Gamma: \quad y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x), \quad (x \in I)$$

是微分方程(2.1)在区域G_1内的任一积分曲线. 则我们在区间I上有恒等式

$$\Phi(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \equiv \text{常数}. \tag{2.4}$$

然后,对它求微分,推出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y_1'(x) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} y_n'(x) \equiv 0, \tag{2.5}$$

或在Γ上有恒等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} f_n \equiv 0, \tag{2.6}$$

由于经过区域G_1内的任何一点都有微分方程(2.1)的一条积分曲线Γ,所以(2.6)也就变成了在区域G_1内的恒等式,亦即恒等式(2.3)成立.

再证充分性:设恒等式(2.3)成立. 则由于上述积分曲线Γ在G_1内,所以我们得到恒等式(2.6). 然后,可由(2.6)反推到(2.4). 这就证明了(2.2)是微分方程(2.1)在区域G_1内的一个首次积分.

这样,我们就完成了证明. ▌

在 §1 中我们已经用例子说明首次积分的用处. 一般而言,利用首次积分可以消去某些未知函数,从而降低了微分方程的阶数. 这对于求解微分方程而言,无疑是前进了一步.

定理 2 若已知微分方程(2.1)的一个首次积分(2.2),则可把微分方程(2.1)降低一阶.

证明 由定义容易推出首次积分Φ的偏导数

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$$

不能都恒等于 0,所以不妨设 $\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \neq 0$. 因此,可以利用隐函数定理,由首次积分(2.2)解出

$$y_n = g(x, y_1, \cdots, y_{n-1}, C), \tag{2.7}$$

而且它有偏导数

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i}\Big/\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n}, \quad (i = 1,\cdots,n-1). \end{cases} \tag{2.8}$$

然后把(2.7)代入微分方程(2.1)的前 $n-1$ 个式子,就消去了 y_n,从而得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x,y_1,\cdots,y_{n-1},\ g(x,y_1,\cdots,y_{n-1},C)), \tag{2.9}$$

$(i = 1,\cdots,n-1)$. 假设它的解为

$$y_1 = u_1(x),\ \cdots,\ y_{n-1} = u_{n-1}(x), \tag{2.10}$$

我们要证:函数组

$$\begin{cases} y_1 = u_1(x), \\ \cdots\cdots \\ y_{n-1} = u_{n-1}(x), \\ y_n = g(x,u_1(x),\cdots,u_{n-1}(x),C) \end{cases} \tag{2.11}$$

就是微分方程(2.1)的解.

事实上,由于(2.10)是方程(2.9)的解,所以(2.11)满足微分方程(2.1)的前 $n-1$ 个等式. 因此,我们只须证明它也满足微分方程(2.1)的最后一个等式.

因为

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y_1}u_1'(x) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}}u_{n-1}'(x) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}}f_{n-1}, \end{aligned}$$

所以再由(2.8)可得

$$\frac{dy_n}{dx} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}}f_{n-1}\right)\Big/\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}.$$

然后,再根据首次积分 Φ 满足的充要条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}}f_{n-1}+\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}f_n\equiv 0,$$

我们就得到

$$\frac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,\cdots,y_n),$$

其中 $y_1,\cdots,y_n$ 由(2.11)给出.

这就证明了所需的结论. ▌

设微分方程组(2.1)有 n 个首次积分

$$\Phi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=C_i, \tag{2.12}$$

$(i=1,\cdots,n)$. 如果在某区域 G_1 内它们的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0 \tag{2.13}$$

则称它们在区域 G_1 内为**互相独立**的.

定理 3 设已知微分方程(2.1)在区域 G_1 内的 n 个互相独立的首次积分(2.12). 则可由它们得到微分方程(2.1)在区域 G_1 内的通解

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,\cdots,C_n),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x,C_1,\cdots,C_n), \tag{2.14}$$

其中 $C_1,\cdots,C_n$ 为 n 个任意常数(在允许的范围内);而且上述通解表示了微分方程(2.1)在 G_1 内所有的解.

证明 因为(2.13)成立,所以用隐函数定理可从(2.12)解出 $y_1,\cdots,y_n$,令它们的表达式为(2.14). 因此,只要把(2.14)代入(2.12),我们就得到相应的关于 x 的恒等式. 然后,再对 x 求导,即得

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}\varphi_1'+\cdots+\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n}\varphi_n'=0,\quad (i=1,\cdots,n) \tag{2.15}$$

其中变元 $y_1,\cdots,y_n$ 由(2.14)给出.

另一方面,由于首次积分的充要条件,等式

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n}f_n=0,\quad (i=1,\cdots,n) \tag{2.16}$$

当变元 $y_1,\cdots,y_n$ 由(2.14)式给定时也成立. 因此,联立(2.15)和

(2.16) 推出

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}(\varphi_1' - f_1) + \cdots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n}(\varphi_n' - f_n) = 0, \quad (i = 1, \cdots, n).$$

再利用条件(2.13),我们得到

$$\varphi_1' = f_1, \quad \cdots, \quad \varphi_n' = f_n,$$

其中变元 $y_1, \cdots, y_n$ 由(2.14)给出. 这就证明了(2.14)是微分方程(2.1)的解.

另外,易知

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_j} + \cdots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial C_j} = \delta_{ij},$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & (i \neq j); \\ 1, & (i = j). \end{cases}$$

由此推出 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 关于 $C_1, \cdots, C_n$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(C_1, \cdots, C_n)} = \left[\frac{D(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}\right]^{-1} \neq 0,$$

这就证明了在(2.14)中的 n 个任意常数 $C_1, \cdots, C_n$ 是互相独立的. 因此,(2.14)是微分方程(2.1)的通解.

我们仍须证明通解(2.14)表示了微分方程(2.1)在区域 G_1 内所有的解.

为此,取微分方程(2.1)在区域 G_1 内的任一解

$$y_1 = z_1(x), \cdots, y_n = z_n(x), \tag{2.17}$$

令初值条件

$$y_1^0 = z_1(x_0), \cdots, y_n^0 = z_n(x_0),$$

其中 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \in G_1$. 再令

$$C_i^0 = \Phi_i(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0), \quad (i = 1, \cdots, n).$$

然后,利用隐函数定理,可从方程

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n) = C_i^0, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

得到微分方程(2.1)的一个解

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1^0, \cdots, C_n^0), \ \cdots, \ y_n = \varphi_n(x, C_1^0, \cdots, C_n^0), \tag{2.18}$$

它满足初值条件

$$y_1^0 = \varphi_1(x_0), \ \cdots, \ y_n^0 = \varphi_n(x_0).$$

因此,(2.17)和(2.18)是微分方程(2.1)满足同一初值条件的两个解. 这样,根据解的唯一性定理推出

$$z_1(x) = \varphi_1(x, C_1^0, \cdots, C_n^0), \ \cdots, \ z_n(x) = \varphi_n(x, C_1^0, \cdots, C_n^0),$$

即解(2.17)可从通解(2.14)得到. ▌

反之,作为定理3的逆命题,我们容易证明下述结论:设已知微分方程(2.1)的通解,则由它可得到 n 个互相独立的首次积分.

因此,在局部范围内求微分方程(2.1)的通解等于求它的 n 个互相独立的首次积分.

习 题 10-2

1. 设已知微分方程(2.1)的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个互相独立的首次积分

$$V_i(x, y_1, \cdots, y_n) = C_i, \quad (i = 1, \cdots, k) \tag{2.19}$$

[这里所谓 k 个互相独立的含意是:矩阵

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\right)_{k \times n}$$

的秩等于 k,或不妨设 Jacobi 行列式

$$\frac{D(V_1, \cdots, V_k)}{D(y_1, \cdots, y_k)}$$

不等于0]. 则利用这 k 个互相独立的首次积分(2.19)可以把微分方程(2.1)降低 k 阶.

2. 设给定首次积分(2.19)如上,又设 $H(z_1, \cdots, z_k)$ 是连续可微的函数,而且它不是常数. 则

$$H(V_1(x, y_1, \cdots, y_n), \ \cdots, \ V_k(x, y_1, \cdots, y_n)) = C$$

是微分方程(2.1)的一个首次积分.

§3. 首次积分的存在性

一般而言,要实际找出微分方程的首次积分是有困难的. 但

是，在相当广泛的条件下，可以证明首次积分的(局部)存在性.

定理 4 设 $P_0=(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$. 则存在 P_0 点的一个邻域 $G_0\subset G$，使得微分方程(2.1)在区域 G_0 内有 n 个互相独立的首次积分.

证明 任取初值条件

$$y_1(x_0)=C_1,\quad \cdots,\quad y_n(x_0)=C_n, \tag{3.1}$$

其中 $(x_0,C_1,\cdots,C_n)$ 在 P_0 点的某个邻域 G^* 内. 则由解对初值的可微性定理推出，微分方程(2.1)满足初值条件(3.1)的解

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,\cdots,C_n),\ \cdots,\ y_n=\varphi_n(x,C_1,\cdots,C_n) \tag{3.2}$$

对 $(x,C_1,\cdots,C_n)$ 是连续可微的，而且 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}{D(C_1,\cdots,C_n)}\right|_{x=x_0}=1.$$

因此，由(3.2)可反解出 $C_1,\cdots,C_n$，得到

$$\Phi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=C_i,\quad (i=1,\cdots,n) \tag{3.3}$$

其中函数 $\Phi_i(x,y_1,\cdots,y_n)$ 在 P_0 点的某邻域 G_0 内是连续可微的，而且 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0.$$

这样一来，我们就得到了微分方程(2.1)在区域 G_0 内的 n 个互相独立的首次积分(3.3). ▌

定理 5 微分方程(2.1)最多只有 n 个互相独立的首次积分.

证明 设微分方程(2.1)有 $n+1$ 个首次积分

$$V_i(x,y_1,\cdots,y_n)=C_i,\quad (i=1,\cdots,n+1). \tag{3.4}$$

则由首次积分的充要条件，在某个区域 G_0 内我们有

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V_i}{\partial y_n}f_n=0,\quad (i=1,\cdots,n+1). \tag{3.5}$$

我们可以把 $(1,f_1,\cdots,f_n)$ 看成是代数联立方程组(3.5)的一个非零解，从而(3.5)的系数行列式

$$\frac{D(V_1,\cdots,V_n,V_{n+1})}{D(x,y_1,\cdots,y_n)}$$

在区域 G_0 内恒等于 0. 这就是说，任何 $n+1$ 个首次积分(3.4)是函数相关的，亦即它们不是互相独立的. ▌

我们还可以进一步证明下述结果.

定理 6　设(2.12)是微分方程(2.1)在区域 G_0 内的 n 个互相独立的首次积分. 则在区域 G_0 内微分方程(2.1)的任何首次积分

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=C$$

可以用(2.12)来表达，亦即

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=h[\Phi_1(x,y_1,\cdots,y_n),\ \cdots,\ \Phi_n(x,y_1,\cdots,y_n)], \tag{3.6}$$

其中 $h[\cdot,\cdots,\cdot]$ 是某个连续可微的函数.

证明　因为(2.12)是互相独立的，所以在区域 G_0 内它们的 Jacobi 行列式

$$J=\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0.$$

由此推出，从函数组

$$\Phi_i=\Phi_i(x,y_1,\cdots,y_n),\quad (i=1,\cdots,n)$$

可解出反函数组

$$y_i=y_i(x,\Phi_1,\cdots,\Phi_n),\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3.7}$$

然后，把它们代入 $V(x,y_1,\cdots,y_n)$，得到一个关于变元 $(x,\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$ 的函数 h，即

$$h(x,\Phi_1,\cdots,\Phi_n):=V(x,y_1,\cdots,y_n), \tag{3.8}$$

其中函数 V 中的变元 $y_1,\cdots,y_n$ 由(3.7)给出.

现在，我们只需证明上述函数 h 与 x 无关. 事实上，我们有

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x}, \tag{3.9}$$

以及

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_i,\cdots,\Phi_n)}{D(y_1,\cdots,x,\cdots,y_n)},\quad (i=1,\cdots,n).$$

因此，由(3.9)可以得到

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{D(V,\Phi_1,\cdots,\Phi_n)}{D(x,y_1,\cdots,y_n)}.$$

但是，由于$V,\Phi_1,\cdots,\Phi_n$是微分方程(2.1)的$n+1$个首次积分，所以由定理5推出它们关于$(x,y_1,\cdots,y_n)$的Jacobi行列式恒等于0，从而

$$\frac{\partial h}{\partial x} \equiv 0.$$

这就证明了函数h不依赖于变量x. 因此，由(3.8)推出

$$V(x,y_1,\cdots,y_n) = h[\Phi_1,\cdots,\Phi_n],$$

即(3.6)成立. ▌

上述的首次积分理论都是在小范围内(即局部)成立的，而在大范围内，一般而言不再成立. 例如，在§1中的例1虽有二个互相独立的首次积分(1.2)和(1.3)，但它们也只是局部的. 这是因为对于(1.2)而言，它的左端函数在原点O没有定义；而对于(1.3)而言，它的左端函数不是单值的(当点(x,y)绕原点逆时针转一圈后函数的值增加2π)，而且在原点O也没有定义.

注意，在§1中的例2有大范围的首次积分(1.6)和(1.7).

*§4. 大范围的首次积分

为了简明起见，我们考虑二阶的微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x,y,z), \tag{4.1}$$

其中函数f和g在(x,y,z)空间的区域Ω内是充分光滑的. 现在我们提出下述问题(W)：

寻找微分方程组(4.1)在大范围区域Ω内的二个互相独立的首次积分

$$\Phi_i(x,y,z) = C_i, \quad (i = 1,2). \tag{4.2}$$

我们要指出，变量x,y,z在方程(4.1)中的地位是不'对称'

的，即 x 是自变量，而 y 和 z 是未知函数. 但是，我们也可以把(4.1)化成如下'对称的'形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = E(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = F(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = G(x,y,z), \end{cases} \tag{4.3}$$

这里 x,y,z 都是未知函数. 从(4.3)消去 dt，即可得到方程组(4.1)，并且有

$$f = F/E, \quad g = G/E.$$

注意，微分方程组(4.3)的右端 E,F,G 不依赖于自变量 t，即它是**驻定的**(**或自治的**)系统.

我们已经知道，(4.2)在 Ω 内分别代表方程(4.1)的二个互相独立的积分曲面族 $S(C_1)$ 和 $T(C_2)$，而且它们的交线 $\Gamma(C_1,C_2)$ 就是微分方程组(4.1)在 Ω 内的积分曲线族，其中 C_1 和 C_2 是二个参数(任意常数).

显然，(4.2)也是微分方程组(4.3)的驻定的首次积分. 因此，对于微分方程组(4.3)的任何运动(解)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{4.4}$$

它们必定满足等式(4.2)，其中 C_1 和 C_2 是与运动(4.4)有关的常数. 这也就是说，微分方程组(4.3)的运动轨线恰好是微分方程组(4.1)的某条积分曲线 Γ，只是轨线的运动方向须要根据(4.3)确定. 反之，微分方程组(4.1)的积分曲线也必定是微分方程组(4.3)的运动轨线. (只是当 $E(x,y,z)=0$ 时须要作必要的补充解释，其说法雷同于在第一章中关于对称形式的微分方程的说明).

这样一来，我们将一般地讨论自治系统(4.3)，其中函数 E,F,G 在 Ω 内是充分光滑的，而且它们除了在个别点以外不能同时等于零. 注意，设在点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$ 上，它们同时等于零，即

$$E(x^*,y^*,z^*) = F(x^*,y^*,z^*) = G(x^*,y^*,z^*) = 0,$$

则(4.3)有一个静止的运动(解)

$$x = x^*,\quad y = y^*,\quad z = z^*,\quad (-\infty < t < \infty),$$

它的轨线蜕化成一个静止点 P^*.

现在,我们把上面的问题(W)改提成如下的问题($\widetilde{W}$):

寻找驻定系统(4.3)在大范围区域 Ω 内的二个互相独立的(驻定的)首次积分(4.2).

以下就来分析这个问题.假设驻定系统(4.3)在 Ω 内有二个互相独立的形如(4.2)的首次积分.则由首次积分的充要条件,我们在 Ω 内有恒等式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}E + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}F + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z}G = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}E + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}F + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z}G = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

令 Jacobi 行列式

$$L = \frac{D(\Phi_1,\Phi_2)}{D(y,z)},\quad M = \frac{D(\Phi_1,\Phi_2)}{D(z,x)},\quad N = \frac{D(\Phi_1,\Phi_2)}{D(x,y)},$$

则联立方程组(4.5)蕴含

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

又令它们的公比为 μ,即得

$$L = \mu E,\quad M = \mu F,\quad N = \mu G. \tag{4.6}$$

因为上面的首次积分 Φ_1 和 Φ_2 是互相独立的,所以在 Ω 内(个别点除外)矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

的秩等于 2,亦即

$$L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

然后,利用(4.6)推出

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{L^2 + M^2 + N^2}{E^2 + F^2 + G^2}},$$

我们在 Ω 内不妨设

$$\mu = \mu(x,y,z) > 0, \quad (\text{个别点除外}). \tag{4.7}$$

另一方面，根据 L, M, N 的定义，容易验证恒等式

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

在 Ω 内成立(这里要求 Φ_1 和 Φ_2 是二次连续可微的).

因此，再由(4.6)我们在 Ω 内得到恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu E) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu F) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu G) = 0, \tag{4.8}$$

其中函数 μ 满足条件(4.7).

当 μ 是常数时，恒等式(4.8)变成

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

即系统(4.3)的发散量等于零，亦即它是一个**保守系统**.

当 μ 不是常数时，称上述函数 $\mu(x,y,z)$ 为微分方程组(4.3)在 Ω 内的一个**拟积分因子**.

引理 设 $\mu(x,y,z) > 0$ 是微分方程组(4.3)在 Ω 内的一个拟积分因子，则(4.3)等价于下述保守系统

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu E, \quad \frac{dy}{d\tau} = \mu F, \quad \frac{dz}{d\tau} = \mu G, \tag{4.9}$$

(个别点除外).

证明 用拟积分因子 μ 乘方程(4.3)，并且令

$$d\tau = \frac{dt}{\mu},$$

即得微分方程(4.9). 显然，微分方程(4.3)和(4.9)在 Ω 内有相同的轨线(个别点除外)，即它们是等价的. 另外，由(4.8)可见，系统(4.9)是保守的. ▍

总结上面的分析，我们得到下面的结果.

定理 7 若微分方程组(4.3)在大范围 Ω 内有二个互相独立的驻定的首次积分，则它在 Ω 内是一个保守系统或等价于一个保守系统. ▎

反之，对于一个保守系统(或一个与保守系统等价的系统)在何种条件下一定存在二个互相独立的大范围的驻定的首次积分呢？这在物理、力学中是受人关注的一个问题，可惜直到现在尚无完整的解答.

在结束本章之前，让我们对以上的分析作一扼要的力学解释. 假想微分方程组(4.3)在区域 Ω 内代表一流体的运动方程. 那么这流体在点 (x,y,z) 的流速等于

$$v(x,y,z)=(E(x,y,z),\ F(x,y,z),\ G(x,y,z)),$$

而其流线就是微分方程组(4.3)在 Ω 内的轨线. 设 A 是系统(4.3)的一个静止点或闭轨等，而且周围的所有流线都奔向(或离开)它，则称 A 是系统(4.3)的一个完全的渊(或源). 容易证明，如果系统(4.3)有完全的渊或源，那么它不可能等价于任何保守系统，从而也不可能有二个互相独立的大范围的驻定的首次积分.

习 题 10-4

1. 对一般的自治系统

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n),\quad (i=1,\cdots,n)$$

$(n\geqslant 2)$ 建立类似于定理 7 的理论；并且当 $n=2$ 时说明上述分析就是在第二章中大范围的恰当方程或积分因子的理论.

2. 证明 §1 的例 1 没有大范围的首次积分：$\Phi(x,y)=C$.

3. 验证 §1 的例 2 满足定理 7 的条件和结论.

4. 根据首次积分的定义直接证明：如果一个自治系统有完全的源或渊，那么它不可能有大范围的首次积分.

第十一章　一阶偏微分方程

从第二章和第十章我们知道，寻找积分因子和首次积分的问题等价于求解一阶线性偏微分方程的问题. 本章将进一步证明，一类更广泛的一阶拟线性偏微分方程可以通过相应的特征方程（常微分方程组）的首次积分得解. 这里顺便指出，与上述积分因子和首次积分有关的偏微分方程问题仍须回到常微分方程范围内得到解决；事实上，一阶偏微分方程的各种解法都离不开常微分方程的首次积分（参考[3]）.

§1.　一阶齐次线性偏微分方程

我们讨论下面的一阶偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \tag{1.1}$$

其中 $u = u(x_1,\cdots,x_n)$ 是未知函数（$n \geqslant 2$）. 假定系数函数 $A_1,\cdots,A_n$ 对 $(x_1,\cdots,x_n) \in D$ 是连续可微的，而且它们不同时为零，即在区域 D 上有

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i(x_1,\cdots,x_n)| > 0.$$

注意，偏微分方程(1.1)是线性齐次的.

对应于偏微分方程(1.1)，我们考虑一个对称形式的常微分方程组

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,\cdots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n(x_1,\cdots,x_n)}, \tag{1.2}$$

它叫作偏微分方程(1.1)的**特征方程**. 注意，特征方程(1.2)是一

个$(n-1)$阶的常微分方程，所以它有$n-1$个独立的首次积分

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=C_i, \tag{1.3}$$

$(i=1,\cdots,n-1)$. 我们的目的是：通过求解特征方程(1.2)的首次积分，求得偏微分方程(1.1)的通解.

定理 1 设已经得到特征方程(1.2)的$n-1$个独立的首次积分为(1.3). 则一阶偏微分方程(1.1)的通解为

$$u=\Phi[\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)], \tag{1.4}$$

其中$\Phi[\cdot,\cdots,\cdot]$是一个任意的$(n-1)$元的连续可微函数.

证明 设

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=C \tag{1.5}$$

是方程(1.2)的一个(局部的)首次积分.

因为函数$A_1,\cdots,A_n$不同时为零，所以在局部邻域内不妨设$A_n(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$. 这样特征方程(1.2)等价于下面标准形式的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dx_n}=\dfrac{A_1(x_1,\cdots,x_n)}{A_n(x_1,\cdots,x_n)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}=\dfrac{A_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)}{A_n(x_1,\cdots,x_n)}.\end{cases} \tag{1.6}$$

因此，(1.5)也是方程(1.6)的一个首次积分. 从而我们有恒等式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i}{A_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0,$$

亦即恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0. \tag{1.7}$$

这就证明，(非常数)函数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$为方程(1.2)的一个首次积分的充要条件为恒等式(1.7)成立. 换言之，$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$为方程(1.2)的一个首次积分的充要条件是$u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$为偏微分方程(1.1)的一个(非常数)解.

因为(1.3)是微分方程(1.2)的 $n-1$ 个独立的首次积分，所以根据首次积分的理论得知，对于任意连续可微的(非常数) $n-1$ 元函数 $\Phi[\cdot,\cdots,\cdot]$，

$$\Phi[\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)]=C$$

就是方程(1.2)的一个首次积分. 因此，相应的函数(1.4)是偏微分方程(1.1)的解.

反之，设 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是偏微分方程(1.1)的一个非常数解，则 $u(x_1,\cdots,x_n)=C$ 是特征方程(1.2)的一个首次积分. 因此，根据首次积分的理论得知，存在连续可微的函数 $\Phi_0[\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}]$，使得恒等式

$$u(x_1,\cdots,x_n)\equiv\Phi_0[\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)]$$

成立，即偏微分方程(1.1)的任何非常数解可表成(1.4)的形式.

另外，如果允许取 Φ 为常数，则(1.4)显然包括了偏微分方程(1.1)的常数解.

因此，公式(1.4)表达了偏微分方程(1.1)的所有的解，亦即它是通解. ▌

【附注 1】 因为首次积分的理论是局部的，所以偏微分方程(1.1)的通解表达式(1.4)在理论上也只是局部的. 另外，我们顺便指出以下事实：一个 n 阶的常微分方程的通解须要用 n 个任意常数来描述，而一个一阶的偏微分方程的通解则须要用一个任意可微的函数来表达. 由此不难想到，一个 n 阶的偏微分方程的通解可以用 n 个可微的任意函数来描述. 但要在理论上证明这个想法已超出了本教程的范围.

【例 1】 求解偏微分方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{1.8}$$

这里设 $x^2+y^2>0$.

解 先写出偏微分方程(1.8)的特征方程

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{-dy}{x-y},$$

它是一阶的常微分方程.容易求得它的一个首次积分

$$\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=C.$$

因此,方程(1.8)的通解为

$$z=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right),$$

这里 $\varphi(\cdot)$ 是一个任意的连续可微函数. ▌

【例 2】　求解初值问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0,\\ \text{当 } z=1 \text{ 时}, f=xy,\end{cases}$$

这里设 $x>0$, $y>0$ 和 $z>0$.

解　先写出相应的特征方程

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z},$$

它是一个二阶的常微分方程.容易求得二个独立的首次积分

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=C_1,\quad 2\sqrt{y}-\ln z=C_2.$$

因此,上述偏微分方程的通解为

$$f=\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\,2\sqrt{y}-\ln z),\tag{1.9}$$

其中 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是一个任意的连续可微函数.

然后,利用上述初值条件,我们得到

$$\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\,2\sqrt{y})=xy.\tag{1.10}$$

由此可以确定函数 $\varphi(\cdot,\cdot)$.事实上,令

$$\xi=\sqrt{x}-\sqrt{y},\quad 2\sqrt{y}=\eta,$$

则有

$$x=(\xi+\frac{1}{2}\eta)^2,\quad y=\frac{1}{4}\eta^2.$$

因此,由(1.10)我们推出函数

$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\eta^2(\xi+\frac{1}{2}\eta)^2.$$

再利用(1.9),我们就得到上述边值问题的解为

$$f = \frac{1}{4}(2\sqrt{y} - \ln z)^2[(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \frac{1}{2}(2\sqrt{y} - \ln z)]^2. \blacksquare$$

习 题 11-1

1. 求解下列偏微分方程:

(1) $x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots + x_k \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad (k \geqslant 2).$

(2) $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

(3) $a(b^2+c^2)\frac{\partial h}{\partial a} + b(c^2+a^2)\frac{\partial h}{\partial b} + c(b^2-a^2)\frac{\partial h}{\partial c} = 0.$

2. 求解下列初值问题:

(1) $\begin{cases} \sqrt{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \text{当 } x = 1 \text{ 时}, u = y - z. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ \text{当 } x = 1 \text{ 时}, z = f_0(y). \end{cases}$

§2. 一阶拟线性偏微分方程

现在考虑下面的一阶偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x_1,\cdots,x_n,u), \tag{2.1}$$

其中函数$A_1,\cdots,A_n$和B关于变元$(x_1,\cdots,x_n,u) \in G$是连续可微的.这个方程(2.1)有一个特点,即关于未知函数的偏导数是线性的(而不管未知函数本身如何出现).称它为**拟线性**偏微分方程.为了便于读者进行比较,我们也写出一般形式的一阶线性偏微分方程如下

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B_0(x_1,\cdots,x_n) + B_1(x_1,\cdots,x_n)u. \tag{2.2}$$

显然,拟线性偏微分方程(2.1)比线性偏微分方程更广泛.另外,

当 B_0 和 B_1 同时恒等于零时，线性偏微分方程(2.2)变成上节讨论过的那种齐次偏微分方程了.

为了简明起见，我们在这里只讨论 $n=2$ 的情形. 这时可把偏微分方程(2.1)写成如下的形式

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z), \tag{2.3}$$

其中函数 X, Y, Z 对 $(x,y,z)\in G$ 都是连续可微的，而且设 X 和 Y 不同时等于零.

设 $z=z(x,y)$ 是偏微分方程(2.3)的解. 我们可以把它写成如下的隐函数形式

$$V(x,y,z)=0. \tag{2.4}$$

则由隐函数的偏导数的公式，我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}\bigg/\frac{\partial V}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y}\bigg/\frac{\partial V}{\partial z}.$$

再把它们代入方程(2.3)，就推得

$$X(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial y}+Z(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{2.5}$$

上述推理表明，如果(2.4)是拟线性偏微分方程(2.3)的隐式解，则函数 $V=V(x,y,z)$ 就是齐次线性偏微分方程(2.5)的(显式)解.

注意(2.5)可以从(2.3)直接写出，并且在上节刚刚介绍了它的求解法. 因此，我们关心的是与上述推理过程相反的问题：如何从齐次线性偏微分方程(2.5)的解得出拟线性偏微分方程(2.3)的解？下面的定理回答了这个问题.

定理 2　假设一阶齐次线性偏方程(2.5)的通解为

$$V=\Phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)],$$

其中

$$u(x,y,z)=C_1,\quad v(x,y,z)=C_2$$

是相应特征方程

$$\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)} \tag{2.6}$$

的二个独立的首次积分；而 $\Phi[\cdot,\cdot]$ 是一个任意连续可微的函数．则偏微分方程(2.3)的(隐式)通解为

$$\Phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)] = 0. \tag{2.7}$$

证明 这里须要证明以下两件事：

(1) 由隐函数关系(2.7)所确定的 $z = z(x,y)$ 是偏微分方程(2.3)的解，只要 $\frac{\partial\Phi}{\partial z} \neq 0$；

(2) 任给偏微分方程(2.3)的一个解 $z = f(x,y)$，它都可以表示为(2.7)的形式，即存在某个函数 $\Phi_0[\cdot,\cdot]$，使得

$$\Phi_0[u(x,y,f(x,y)),\ v(x,y,f(x,y))] \equiv 0,$$

亦即

$$G(x,y) = u(x,y,f(x,y))$$

和

$$H(x,y) = v(x,y,f(x,y))$$

是函数相关的．

首先证明(1)：因为 $V = \Phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)]$ 是方程(2.5)的解，即

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + Z\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \tag{2.8}$$

是关于 x,y,z 的恒等式，又因为由(2.7)确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

所以由恒等式(2.8)推出

$$X(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x} + Y(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y} = Z(x,y,z(x,y)),$$

亦即 $z = z(x,y)$ 是偏微分方程(2.3)的一个解．

其次证明(2)：因为 $z = f(x,y)$ 是偏微分方程(2.3)的解，而

且我们有

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y},$$

所以当 $z=f(x,y)$ 时有

$$X\frac{\partial G}{\partial x}+Y\frac{\partial G}{\partial y}=X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}+\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}+Z\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

亦即

$$X\frac{\partial G}{\partial x}+Y\frac{\partial G}{\partial y}\equiv 0,\tag{2.9}$$

同理

$$X\frac{\partial H}{\partial x}+Y\frac{\partial H}{\partial y}\equiv 0.\tag{2.10}$$

由于 X 和 Y 不能同时为零，所以联立方程(2.9)-(2.10)的系数行列式，即 Jacobi 行列式

$$\frac{D(G,H)}{D(x,y)}\equiv 0,$$

它蕴含上述 $G(x,y)$ 和 $H(x,y)$ 是函数相关的.

定理 2 得证. ▌

【例 3】　求解初值问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,\\ \text{当 } x=1 \text{ 时}，z=\sin 2y.\end{cases}\tag{2.11}$$

解　先解相应的特征方程

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z},$$

它有二个独立的首次积分

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=C_1,\quad 2\sqrt{y}-\ln|z|=C_2.$$

因此，利用上述定理 2，得到偏微分方程(2.11)的通解

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ 2\sqrt{y}-\ln|z|)=0, \tag{2.12}$$

其中$\Phi[\xi,\eta]$是任意的连续可微函数，且设$\Phi'_\eta\neq 0$. 则由(2.12)可解出

$$2\sqrt{y}-\ln|z|=\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

因此，得到所求的通解为

$$z=\pm\exp[2\sqrt{y}-\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y})],$$

或

$$z=[\exp(2\sqrt{y})]\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y}), \tag{2.13}$$

其中$\varphi(\cdot)$是一个任意连续可微的函数.

然后，由(2.13)和初值条件，我们推出

$$[\exp(2\sqrt{y})]\varphi(1-\sqrt{y})=\sin 2y,$$

亦即

$$\varphi(1-\sqrt{y})=[\exp(-2\sqrt{y})]\sin 2y.$$

令$t=1-\sqrt{y}$. 则$y=(1-t)^2$. 因此，我们得到

$$\varphi(t)=e^{2(t-1)}\sin[2(1-t)^2].$$

再利用(2.13)，我们得到所求初值问题的解为

$$z=[\exp 2(\sqrt{x}-1)]\sin[2(1-\sqrt{x}+\sqrt{y})^2].$$ ▌

【例 4】 求解偏微分方程

$$x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial y}{\partial x_n}=ky, \tag{2.14}$$

其中k是正整数.

解 在数学分析中，我们已经知道，当y是$x_1,\cdots,x_n$的k次齐次函数时，y满足偏微分方程(2.14). 现在我们可以证明，上述逆命题也成立.

先写出偏微分方程(2.14)的特征方程

$$\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dy}{ky},$$

它是 n 阶的常微分方程. 易知,它有 n 个独立的首次积分

$$\frac{x_1}{x_n}=C_1,\quad \cdots,\quad \frac{x_{n-1}}{x_n}=C_{n-1},\quad \frac{y}{(x_n)^k}=C_n.$$

因此,偏微分方程(2.14)的通解为

$$\Phi\left[\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{y}{(x_n)^k}\right]=0.$$

由此可确定所求的通解为

$$y=(x_n)^k\varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

它关于 $x_1,\cdots,x_n$ 显然是 k 次齐次的.

因此,我们推出,可微函数 $y=y(x_1,\cdots,x_n)$ 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 是 k 次齐次的,当且仅当它是偏微分方程(2.14)的解. ▌

习　题　11-2

1. 求下列偏微分方程的通解:

(1)　$\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}=xyz.$

(2)　$(xy^3-2x^4)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=9z(x^3-y^3).$

2. 求解:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial f}{\partial z}=f,\\ \text{当 } y=1 \text{ 时 } f=xz.\end{cases}$$

3. 试讨论一般的拟线性偏微分方程(2.1)的解法.

§3.　几何解释

设一阶拟线性偏微分方程

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z),\tag{3.1}$$

其中关于函数 X,Y,Z 的假设同上节. 它的特征方程为

$$\frac{dx}{X(x,y,z)}=\frac{dy}{Y(x,y,z)}=\frac{dz}{Z(x,y,z)}. \tag{3.2}$$

本节的目的是要对偏微分方程(3.1)的解和由它的特征方程规定的积分曲线之间的关系作出几何说明，从而提出有关偏微分方程(3.1)的一般初值问题的解法 —— **特征线法**.

在特征方程(3.2)的定义区域G内的每一点$P(x,y,z)$可作一向量

$$v_P=\Big(X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z)\Big).$$

这样我们在区域G内就得到一个向量场. 显然，特征方程(3.2)经过P点的积分曲线Γ在P点以v_P为一切向量.

今后我们称上述向量v_P为**特征向量**；称特征方程(3.2)的积分曲线Γ为**特征曲线**；而称偏微分方程(3.1)的解$z=z(x,y)$所规定的曲面S为**积分曲面**.

设在积分曲面S上任取一点P，则曲面S在P点的法向量为

$$n_P=\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ -1\Big).$$

由方程(3.1)可见，向量v_P和n_P的数量积等于零，所以它们是互相垂直的. 这就说明，在P点的特征向量v_P只可能与积分曲面S在P点相切，亦即特征曲线Γ与积分曲面S在交点P只可能是相切，不可能是横截(不相切).

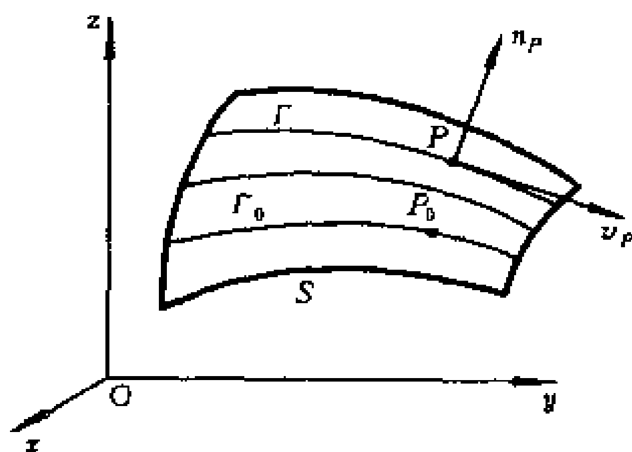


图 11-1

现在我们将进一步说明积分曲面S实际上是由特征曲线构成的，这话的含意如下(参见图11-1)：

(1) 通过S上任何一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$恰有一条特征曲线Γ_0，而且$\Gamma_0\subset S$；

(2) 由特征曲线生成的光滑曲面 F: $z=f(x,y)$ 是偏微分方程(3.1)的一个积分曲面.

上述性质(1)的第一句话只是常微分方程(3.2)的解的存在性和唯一性的直接推论.现证第二句话,即通过积分曲面 S 上各点 P_0 的特征曲线 Γ_0 完全落在积分曲面 S 上.

事实上,特征方程(3.2)有二个独立的首次积分

$$\varphi(x,y,z)=C_1,\quad \psi(x,y,z)=C_2,$$

它们共同确定了特征曲线族.因此,特征曲线 Γ_0 满足

$$\varphi(x,y,z)=C_1^0,\quad \psi(x,y,z)=C_2^0, \tag{3.3}$$

其中常数

$$C_1^0=\varphi(x_0,y_0,z_0),\quad C_2^0=\psi(x_0,y_0,z_0). \tag{3.4}$$

另一方面,根据上节定理2,积分曲面 S 可以表示为如下的形式

$$h\Big[\varphi(x,y,z),\ \psi(x,y,z)\Big]=0, \tag{3.5}$$

这里 $h[\cdot,\cdot]$ 是某个连续可微的函数.因此,由于 $P_0\in S$,我们有

$$h\Big[\varphi(x_0,y_0,z_0),\ \psi(x_0,y_0,z_0)\Big]=0.$$

所以由(3.4)得到

$$h\Big[C_1^0,\ C_2^0\Big]=0.$$

然后,由(3.3)推出,在特征曲线 Γ_0 上我们有

$$h\Big[\varphi(x,y,z),\ \psi(x,y,z)\Big]=0.$$

这就证明了 $\Gamma_0\subset S$.

然后再证明性质(2).

我们知道,一个光滑曲面 F: $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y,z)$ 的法向量为

$$n_P=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ -1\right).$$

由于这曲面 F 是由特征曲线生成的,故在 P 点的法向量 n_P 应与特征向量 v_P 互相垂直.因此,我们有

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}-Z(x,y,z)=0,$$

其中 $z=f(x,y)$. 这就证明了 F 是一个积分曲面.

有了上面的几何性质(1)和(2),我们就可以进一步从几何上理解偏微分方程(3.1)的下述初值问题:

给定一条光滑曲线

$$\Lambda:\qquad x=\alpha(\sigma),\quad y=\beta(\sigma),\quad z=\gamma(\sigma),\quad (\sigma\in I),$$

其中 σ 为曲线的参数坐标. 试求偏微分方程(3.1)的一个积分曲面 S,使得它通过初始曲线 Λ.

由此可见,如果由初始曲线 Λ 串连起来的那些特征曲线组成一个光滑的曲面 S: $z=f(x,y)$,那么它就是所求的(唯一)积分曲面. 这样一来,我们只须寻找那些通过初始曲线 Λ 的特征曲线(参见图 11-1).

在 Λ 上任取一点 $M(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\gamma(\sigma))$,则通过 M 点的特征曲线为

$$\Gamma_M:\qquad \varphi(x,y,z)=\overline{C}_1,\quad \psi(x,y,z)=\overline{C}_2,\tag{3.6}$$

其中常数

$$\overline{C}_1=\varphi(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\gamma(\sigma)),\quad \overline{C}_2=\psi(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\gamma(\sigma)).\tag{3.7}$$

然后,由(3.7)消去参数 σ,我们得到 $\overline{C}_1$ 与 $\overline{C}_2$ 之间的关系式

$$E(\overline{C}_1,\overline{C}_2)=0,$$

它表示那些与初始曲线 Λ 相交的特征曲线所满足的关系式. 因此,由(3.6)可见,关系式

$$E\Big(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)\Big)=0$$

确定了所求的积分曲面 S: $z=f(x,y)$.

【附注】 如果与初始曲线 Λ 相交的每一条特征曲线 Γ 都不与 Λ 相切(即 Γ_M 与 Λ 在 M 点是横截相交的),那么这些特征曲线显然组成一个光滑的曲面 S;而且如果这曲面 S 可以表达成 $z=$

$f(x,y)$ 的形式，那么 S 就是所求的积分曲面．但是，如果曲面 S 不能表成 $z=f(x,y)$ 的形式，那么它不能代表偏微分方程(3.1)的解．因此，这时上述初值问题无解．另外，容易想象，与初始曲线相交的那些特征曲线可能并不组成一个曲面．例如：当初始曲线 $\widetilde{\Lambda}$ 本身是一条特征曲线时，那些通过 $\widetilde{\Lambda}$ 的特征曲线其实只是 $\widetilde{\Lambda}$ 自己而已，这样我们当然不能得到一个曲面；但是，这时也容易知道，任何一个包含特征曲线 $\widetilde{\Lambda}$ 的积分曲面都是所求初值问题的解．因此，当初始曲线本身是一条特征曲线时，上述偏微分方程的初值问题的解是存在的，可是不唯一．

【例 5】　求偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z \tag{3.8}$$

的积分曲面，使得它通过初始曲线

Λ_1:　　$x=t$,　$y=3t$,　$z=1+t^2$,　($t>0$ 为参数)．

解　先解特征方程

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}.$$

它有二个独立的首次积分

$$xy=C_1,\quad yz=C_2. \tag{3.9}$$

利用初始曲线，我们有

$$3t^2=C_1,\quad 3t(1+t^2)=C_2,$$

由此消去参数 t，得到关系式

$$C_2=\sqrt{3C_1}\left(1+\frac{1}{3}C_1\right).$$

再利用(3.9)，我们得到所求的解

$$yz=\sqrt{3xy}\left(1+\frac{1}{3}xy\right),$$

亦即

$$z=\sqrt{\frac{3x}{y}}\left(1+\frac{1}{3}xy\right).\quad \blacksquare$$

【例 6】 试求偏微分方程(3.8)通过初始曲线

$$\Lambda_2: \quad x = 0, \quad z = y$$

的积分曲面.

解 由特征曲线族(3.9)显然可见,通过这条初始曲线 Λ_2 的所有特征曲线组成的曲面为平面 $x = 0$,它不能表示成 $z = f(x,y)$ 的形式.因此,这个初值问题无解. ▌

【例 7】 试求偏微分方程(3.8)的积分曲面,使得它通过初始曲线

$$\Lambda_3: \quad x = t, \quad y = \frac{1}{t}, \quad z = t, \quad (t > 0).$$

解 易知这初始曲线 Λ_3 与一支特征曲线:

$$xy = 1, \quad yz = 1$$

重合.因此,不难知道,这初值问题有无穷多个解.[事实上,在 Λ_3 上取定一点 P_0,并且通过 P_0 任意作一条光滑的曲线 Λ_0,使得 Λ_0 与 Λ_3 横截相交.则通过 Λ_0 有唯一的一个积分曲面 S_0.因为 Λ_3 是过 P_0 点的特征曲线,所以 $\Lambda_3 \subset S_0$,即 S_0 为通过 Λ_3 的一个积分曲面.] ▌

本章所介绍的只是一阶拟线性偏微分方程.至于一般的一阶非线性偏微分方程的理论和解法,有兴趣的读者可以参考文献[3]和[6].

习 题 11-3

1. 求解初值问题:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{z}\,; \\ \text{通过初始曲线 } \Lambda: \quad x = y = z. \end{cases}$$

2. 求解初值问题:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \\ \text{当 } x = 2y \text{ 时 } z = y^2. \end{cases}$$

参 考 文 献

[1] G. N. Waston, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambrige, 1944, 111—123.

[2] E. A. Coddington & N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] B. B. 史捷班诺夫(Степанов), 微分方程教程（卜元震译），高等教育出版社，1955.

[4] B. B. 戈鲁别夫(Голубев), 微分方程解析理论讲义（路见可、齐民友译），高等教育出版社，1956.

[5] B. B. 涅梅茨基(Немыцкий)、B. B. 斯捷巴诺夫(Степанов)，微分方程定性论（王柔怀、童勤谟译），科学出版社，1956.

[6] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

[7] И. Г. 彼得罗夫斯基(Петровский)，常微分方程讲义（黄克欧译），高等教育出版社，1957.

[8] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社，1959.

[9] 许淞庆，常微分方程稳定性理论，上海科学技术出版社，1962.

[10] 王柔怀、伍卓群，常微分方程讲义，人民教育出版社，1963.

[11] S. 莱夫谢茨(Lefschetz)，微分方程几何理论（许淞庆译），上海科学技术出版社，1965.

[12] O. Plaat, *Ordinary Differential Equations*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1971.

[13] 金福临、李训经，常微分方程，上海科技出版社，1979.

[14] 丁同仁，常微分方程基础，上海科技出版社，1981.

[15] 叶彦谦，常微分方程讲义（第二版），人民教育出版社，1982.

[16] 东北师范大学数学系微分方程教研室，常微分方程，人民教育出版社，1982.

[17] S-N Chow & J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1982.

[18] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.

[19] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[20] 王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松，常微分方程（第二版），高等教育出版社，1983.

[21] 叶彦谦等，极限环论（第二版），上海科学技术出版社，1984.

[22] B. И. 阿诺尔德（Арнольд），常微分方程（沈家骐、周宝熙、卢亭鹤译），科学出版社，1985.

[23] 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜，微分方程定性理论，科学出版社，1985.

[24] 张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题（修订本），北京大学出版社，1987.

[25] 王联、王慕秋，非线性常微分方程定性分析，哈尔滨工业大学出版社，1987.

[26] 高素志、马遵路、曾昭著、陈平尚，常微分方程，北京师范大学出版社，1988.

习题答案与提示

习　题　1-1

2. (1) $y = a_0 + a_1x + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{x^3}{6}$;　　(2) $y = \int_0^x f(s)ds$, $-1 < x < 1$;

   (3) $y = e^{-at}$;　　(4) $y = \mathrm{tg}(x - x_0 + \mathrm{arctg}\, y_0)$.

*3. 利用隐函数定理.

4. (1) $xy' - x^2 - y = 0$;　　(2) $y'' - 2y' + y = 0$;

   (3) $x - yy' = 0$;　　(4) $[1 + (y')^2]\, y''' - 3y'(y'')^2 = 0$.

习　题　2-1

1. 不是.
2. 是，　$\frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 = C$.
3. 是，　$ax^2 + 2bxy + cy^2 = K$.
4. 不是.
5. 是，　$(t^2 + 1)\sin u = C$.
6. 是，　$e^x(y + 2) + xy^2 = C$.
7. 是，　$\frac{1}{3}x^3 + y\ln x - y^2 = C$.
8. 当 $c \neq 2b$ 时，不是；　当 $c = 2b$ 时，是，$\frac{1}{3}ax^3 + bxy^2 = K$.
9. 是，　$s^2 - s = Ct$.
10. 是，　$F(x^2 + y^2) = C$，其中 F 是 f 的一个不定积分.

习　题　2-2

1. (1) $3y^2 - 2x^3 = C$，$y \neq 0$;

   (2) $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = C$，$y \neq 0, x \neq -1$;

   (3) $1 + (C + \cos x)y = 0$ 和 $y = 0$;

   (4) $y = \mathrm{tg}(x + \frac{1}{2}x^2 + C)$;

(5) $2\text{tg}2y - 2x - \sin 2x = C$ 和 $y = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$;

(6) $\arcsin y - \ln|x| = C$ 和 $y = \pm 1$;

(7) $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$, $(y + e^y \neq 0)$.

2. (1) $2\sin 3y - 3\cos 2x = 3$; (2) $2(x-1)e^x + y^2 + 1 = 0$;

(3) $r = 2e^\theta$; (4) $y + \frac{1}{3}y^3 + x - 1 - x\ln x = 0$;

(5) $y^{-2} + 2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 3$.

3. (1) $y = \sin x + C$; (2) $y = Ce^{ax}$; (3) $y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}$,和特解 $y = \pm 1$;

(4) $\frac{1}{n-1}y^{1-n} + x = C$,当 $n \neq 1$; $y = Ce^x$,当 $n = 1$.

4. 设 B 的运动轨迹为 $y = y(x)$,则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$,解出得

$$x = \frac{1}{2}b\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - y^2}}{b - \sqrt{b^2 - y^2}} - \sqrt{b^2 - y^2}.$$

*5. 用反证法.

习 题 2-3

1. (1) $y = Ce^{-2x} + (x-1)e^{-x}$; (2) $y = C\cos x - 2\cos^2 x$;

(3) $y = (\sin x - x\cos x)x^{-2}$; (4) $y = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}(\arcsin x + 1)$.

2. (1) 令 $u = y^2$; (2) 将 x 看作 y 的函数;

(3) 令 $u = y^3$; (4) 令 $u = \sin y$.

3. 将微分不等式两端乘以 $e^{\int_0^x a(s)ds}$,然后积分.

5. 利用通解表达式(3.6)进行证明.

6. 所求的有界解为 $y = \int_{-\infty}^x e^{s-x}f(s)ds$.

7. $\varphi(f) = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f(s)ds$; $\|\varphi(f)\| \leqslant \frac{1}{a}\|f\|$.

习 题 2-4

1. (1) $y - x = C(x+y)^3$; (2) $y - x + 3 = C(x + y + 1)^3$;

(3) $8y - 4x - 3\ln|8y + 4x + 1| = C$;

(4) $y^2 = (Ce^{x^2} + x^2 + 1)^{-1}$,特解 $y = 0$.

2. (1) $\cos\frac{y-x}{2}=2x\sin\frac{y-x}{2}+C\sin\frac{y-x}{2}$，特解 $y=x+2K\pi$；

(2) $u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2=C$；

(3) 作变换 $u=y^2, v=x^2$，可得通积分为 $x^2=C\frac{(t-1)^2}{(t-2)^3}-2$，

$y^2=C\frac{t(t-1)^2}{(t-2)^3}-1$；

(4) 作变换 $u=y^2, v=x^2$，得通积分 $(x^2-y^2-1)^5=C(x^2+y^2-3)$.

3. (1) 一个特解为 $y=\frac{1}{2x}$，通解为 $y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{Cx+x\ln|x|}$；

(2) $y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx-x\ln|x|}$.

4. 令 $y=e^{\int u dx}$，则方程化成 $u'+u^2+p(x)u+q(x)=0$.

5. 微分方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$，曲线方程为 $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)=C$.

6. $y^2=2C(x+\frac{C}{2})$.

习　题　2-5

1. (1) 可取 $\mu=e^{3x}$，得通积分为 $3x^2y+y^3=Ce^{-3x}$；

(2) 可取 $\mu=\frac{1}{y}e^{2y}$，得通积分为 $xe^{2y}-\ln y=C$；

(3) 可取 $\mu=xy$，得通积分为 $x^3y+3x^2+y^3=C$；

(4) 可取 $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$，得通积分为 $y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$；

(5) 可取 $\mu=\frac{1}{y^2}$，得通积分为 $x^2y+\frac{1}{y}=C$；

(6) 可取 $\mu=\frac{1}{y^2}$，得通积分为 $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=C$；

(7) 可取 $\mu=\frac{1}{x^2y}$，得通积分为 $\ln y^2-\frac{1}{x}y^2=C$；

(8) 可取 $\mu=\sin y$，得通积分为 $e^x\sin y-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y=C$.

2. (1) $\frac{1}{Q\mp P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x\pm y)$；

(2) $\frac{1}{xQ-yP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x^2-y^2)$；

(3) $\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(xy)$；

(4) $\dfrac{1}{\dfrac{y}{x^2}Q+\dfrac{P}{x}}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

(5) $\dfrac{1}{\dfrac{\alpha Q}{x}-\dfrac{\beta P}{y}}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x^{\alpha}y^{\beta})$.

3. 作变换 $y=ux$. 然后证明变换后的方程有积分因子 $\{x^{m+1}[P(1,u)+uQ(1,u)]\}^{-1}$，其中 m 为齐次方程的次数.

4. 由于 $\mu(Pdx+Qdy)=d\Phi$, 所以 $\mu g(\Phi)(Pdx+Qdy)=d\int g(\Phi)d\Phi$. 由此可证定理 6. 再设 $\mu_1(Pdx+Qdy)=d\Psi$，则 Jacobi 行列式 $\dfrac{D(\Psi,\Phi)}{D(x,y)}\equiv 0$，从而 Ψ 与 Φ 函数相关. 因此 $\dfrac{\mu_1}{\mu}=\dfrac{d\Psi}{d\Phi}$ 可表示为 Φ 的函数，定理 6 之逆得证.

5. 可利用上题结果.

习　题　2-6

1. (1) $x^2+y^2=Ky$;　　(2) $x^2-y^2=K$;

(3) $x^2+\dfrac{3}{2}y^2=K$;　　(4) $x^2+y^2-\ln x^2=K$.

2. (1) $y-3x=K$;　　(2) $x^2-y^2+2xy=K$;

(3) $\ln(y^2+xy+2x^2)-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2y+x}{\sqrt{7}x}=K$;

(4) $\ln(y^2-xy+2x^2)-\dfrac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2y-x}{\sqrt{7}x}=K$.

3. $\sqrt{3}(x^2-y^2+1)+2xy=1$.

4. $x=\dfrac{y^{1+\frac{a}{b}}-1}{2\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}-\dfrac{y^{1-\frac{a}{b}}-1}{2\left(1-\dfrac{a}{b}\right)}$,　　$T=\dfrac{b}{b^2-a^2}$.

5. $v_0=7.94$ 公里 / 秒.

6. 设比例常数为 p，则 $x(t)=\dfrac{CNe^{pNt}}{1+Ce^{pNt}}$；当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to N$.

习　题　3-1

1. (1) $a\geqslant 1$ 时解唯一，$a<1$ 时解不唯一；

(2) 解唯一.

2. $y=2(e^x-1)-x$.

*3. 利用反证法. 设有两个解 $y(x)$ 和 $y_1(x)$, $y(x_0)=y_1(x_0)$, 且存在 $x_1>x_0$, 使 $y(x_1)>y_1(x_1)$. 令 $\xi=\sup\{x_0\leqslant x<x_1: y(x)=y_1(x)\}$, $r(x)=y(x)-y_1(x)$, 则可在 ξ 点导出矛盾.

习 题 3-2

3. 不能. 原因是:在定义毕卡序列的积分式(1.4)中, $y_{n+1}(x)$ 是通过 $y_n(x)$ 表示的. 一旦限制在子序列上,这种表示法就失效了.

*4. 用 Ascoli 引理证明. (Tonelli 序列的构造方法虽不大自然,但它成功地克服了上题中所说的困难.)

习 题 3-3

2. (1) $(-\infty,+\infty)$, 或 $(-\infty,0)$, 或 $(0,+\infty)$;

   (2) $(-\infty,+\infty)$, 或 $(-\infty,C)$, 或 $(C,+\infty)$;

   (3) $(-\infty,+\infty)$;

   (4) $\left(C-\dfrac{\pi}{2},\ C+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

*4. 仿例 2 的方法证明.

*5. 仿例 2 的方法证明.

习 题 3-4

1. 利用解的延伸定理.

习 题 4-1

1. (1) 通解 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+Cx+\dfrac{1}{2}C^2$, 特解 $y=x^2$;

   (2) 通解 $y=C\ln|x|+C^2$, 特解 $y=-\dfrac{1}{4}(\ln|x|)^2$;

   (3) 通解 $x=C\sin y+\dfrac{1}{2C^2}$, 特解 $x=\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}y$.

2. (1) 通解 $y=\sqrt{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x-C)$, 特解 $y=\pm\sqrt{x}$;

   (2) 通解 $x=\dfrac{t^2+1}{2t}, y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{t^2}{4}-\ln|t|-\dfrac{1}{t^2}\right)+C$;

(3) 通解 $y = x^2 - p^2$, $(p - \alpha x)^{\alpha} = C(p - \beta x)^{-\beta}$, 其中 $\alpha = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $\beta = -\frac{\sqrt{17}+1}{4}$, 特解 $y_1 = \frac{1}{2}\alpha x^2$, $y_2 = \frac{1}{2}\beta x^2$;

(4) 令 $\frac{dy}{dx} = xt$, 通解 $x = \frac{4t}{1+t^3}$, $y = -\frac{8}{(1+t^3)^2} + \frac{32}{3}\frac{1}{1+t^3} + C$.

习　题　4-2

1. (1) $y = -\frac{1}{4}x^2$;　　(2) 无奇解;　　(3) $y = 0$.

2. 分别讨论微分方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0$ 和 $\sin\left(y\frac{dy}{dx}\right) = y$.

习　题　4-3

2. $y = xp - p\arcsin p + \sqrt{1-p^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$.

习　题　5-1

2. 证明 $a = 0$.

习　题　5-2

1. 单摆方程:　$\frac{dx}{dt} = y$,　$\frac{dy}{dt} = -a^2\sin x$, 其中 $a = \sqrt{\frac{g}{l}}$;

   悬链线方程:　$\frac{dy}{dx} = v$,　$\frac{dv}{dx} = a\sqrt{1+v^2}$;

   二体运动方程:　$\frac{dx}{dt} = u$,　$\frac{du}{dt} = -Gm_S x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$,

   $\frac{dy}{dt} = v$,　$\frac{dv}{dt} = -Gm_S y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$,

   $\frac{dz}{dt} = w$,　$\frac{dw}{dt} = -Gm_S z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$.

习　题　5-3

2. 用反证法.

3. 例子: $y' = y^{1/3}$. (参见第二章 §2 的例 2 和图 2-2.)

习 题 5-4

2. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x, \eta))z$, $z(x_0) = E$,（E 为 n 阶单位矩阵）.

习 题 6-1

1. （1）$y_1 = C_1 t$, $y_2 = C_2 t$;　　（2）$y_1 = C_1 e^t + C_2 t e^t$, $y_2 = C_2 e^t$;

（3）$y_1 = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, $y_2 = C_1 \cos t - C_2 \sin t$;

（4）$y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^t$, $y_2 = C_3 e^t$, $y_3 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 e^t$.

2. （1）$x = \frac{t}{3}$, $y = -\frac{t}{3}$;　　（2）$x = 0$, $y = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{t}$.

6. 设 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为相应齐次微分方程组(1.2)的一个基本解组，$\boldsymbol{y}$ 为非齐次线性微分方程组(1.1)的一个特解．则 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}$ 为(1.1)的 $n+1$ 个线性无关解.

习 题 6-2

（下面采用行向量的写法．注意解的形式是不唯一的.）

1. （1）$C_1(4, -5)e^{-2x} + C_2(1, 1)e^{7x}$;

（2）$C_1(\cos ax, -\sin ax) + C_2(\sin ax, \cos ax)$;

（3）$C_1(0, 0, 1)e^{-4x} + C_2(3, 0, 1)e^{-x} + C_3(9x, 9, 1 + 3x)e^{-x}$;

（4）$C_1(-2, 0, 1)e^{3x} + C_2(20\cos x - 10\sin x, 15\cos x + 5\sin x, -14\cos x - 2\sin x)e^{2x} + C_3(10\cos x + 20\sin x, 15\sin x - 5\cos x, -2\cos x - 14\sin x)e^{2x}$;

（5）$C_1(1, 0, 0)e^x + C_2(\frac{2}{3}x, 1 - \frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}x)e^x + C_3(-\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}x, 1 + \frac{1}{3}x)e^x$;

（6）$C_1(-1, 1, 1, 1)e^{-2x} + C_2(1, 0, 1, 0)e^{2x} + C_3(1, 0, 0, 1)e^{2x} + C_4(1, 1, 0, 0)e^{2x}$.

2. （1）$C_1(1, 0)e^{2x} + C_2(x, 1)e^{2x} - (\frac{1}{2}, 0)$;

（2）$C_1(1, -1)e^{n^2 x} + C_2(1, 1)e^{-n^2 x} + (\frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx, \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx)$;

（3）$C_1(1, 1)e^x + C_2(x, -1 + x)e^x + (-x^2, 2x - x^2)e^x$;

（4）$C_1(1, -1, 0)e^x + C_2(\sin x, \cos x, \sin x) + C_3(\cos x, -\sin x, \cos x) + (-1, x, 0)$;

(5) $C_1(1,0,0)e^x + C_2(x, -1, 0)e^{-x} + C_3(x^2, -2x, 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 3, x, x-1)$.

3. (1) $-\frac{211}{900}(-x, 1+x)e^{-4x} + \frac{61}{900}(1-x, x)e^{-4x} + (\frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}, \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x})$;

(2) $(\frac{13}{4}\cos 2x - 3\sin 2x - \frac{5}{4}, \frac{13}{4}\sin 2x + 3\cos 2x + \frac{3}{2}x)$;

(3) $(-2\sin x + \cos x - 4e^x + 3e^{2x}, -2\sin x + 2\cos x - 4e^x + 2e^{2x})$;

(4) $(-2x, -3x, +2x)e^{-x}$.

4. $x = e^{at}(C_1\cos bt - C_2\sin bt)$, $y = e^{at}(C_1\sin bt + C_2\cos bt)$.

5. 利用齐次线性微分方程的通解公式.

习 题 8-3

1. 不矛盾. 这说明不存在一个二阶齐次线性微分方程,它以 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 为解组.

3. (2) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $q(x) = -1$.

4. (1) 利用反证法和解的存在和唯一性定理.

(2) 利用 $\varphi(x)$ 的零点把区间 (a,b) 分割成有限个开区间. 在每一个开区间内可应用例 1 的结论;而在这些区间的端点处分别考虑两侧解的极限(改写(3.11) 中的不定积分为变上限积分).

6. 参考本节例 2 的第二种解法.

7. 作自变量的变换 $x = e^t$.

8. 当 $\Delta > 0$ 时, $x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$, 其中 $\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$ 均为负数;

当 $\Delta = 0$ 时, $x = (C_1 + C_2t)e^{\lambda t}$, 其中 $\lambda = -\frac{r}{2m}$ 为负数;

当 $\Delta < 0$ 时, $x = e^{\lambda t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$, 其中 $\lambda = -\frac{r}{2m}$ 为负数, 而 $\beta = \sqrt{-\Delta}$. (关于解的物理意义可参考文献 [14]的 112 – 114 页, 或 [15] 的 213 – 216 页.)

9. 记 $\sqrt{\frac{k}{m}} = \Omega$. 当 $\Omega \neq \omega$ 时, $x = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t + \frac{\frac{p}{m}}{\Omega^2 - \omega^2}\cos\omega t$; 而当 $\Omega = \omega$ 时, $x = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t + \frac{p}{2m\Omega}t\sin\Omega t$. (关于解的物理意义可参考

文献[10]的134－136页，或[14]的118－120页.)

10. (1) $y = e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$;

(2) $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$;

(3) $y = C_1e^{-2x} + C_2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$;

(4) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x$;

(5) $y = C_1e^{-2x} + e^{2x}(C_2\cos x + C_3\sin x)$;

(6) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{3x}$;

(7) $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x)e^x$;

(8) $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x$;

(9) $y = (1 + \frac{5}{8}x)\cos x - (\frac{21}{8} - 2x + \frac{1}{8}x^2)\sin x$;

(10) $y = e^x$;

(11) $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x + xe^x(\sin x - \cos x)$;

(12) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + xe^{-x}$;

(13) 令 $x = e^t$,得 $y = \frac{1}{x^2}[C_1\sin(3\ln x) + C_2\cos(3\ln x)]$;

(14) $y = C_1(2x + 1) + C_2(2x + 1)^2$.

习　题　6-4

1. (1) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\cos 2x$;

(2) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x$;

(3) $y = C_1e^{3x}\cos x + C_2e^{3x}\sin x + e^{3x}$;

(4) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$;

(5) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}xe^{2x}$;

(6) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{8}x^2\cos 2x + \frac{1}{16}x\sin 2x$;

(7) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x - \frac{1}{4}x^2) + \frac{1}{8}e^x$;

(8) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{4}xe^x(\cos x + x\sin x)$;

(9) $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + (\frac{1}{4}x - \frac{3}{8})e^x$;

(10) $y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + 2xe^x - \frac{1}{6}e^{-x}$;

(11) $y = (C_1 - C_2\cos x + C_3\sin x)e^x + xe^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$;

(12) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^{-x} - \frac{1}{80}(\cos 3x + 3\sin 3x) - \frac{1}{15}(\cos 2x + 2\sin 2x)$;

(13) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3e^x + C_4e^{-x} + \frac{1}{10}xe^x$;

(14) $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \frac{x^3}{12}\sin x - (\frac{x^4}{48} - \frac{3x^2}{16})\cos x$;

(15) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x + C_6x^2)e^x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^4$.

2. (1) $y' = \frac{1}{5}e^{3x} + \frac{4}{5}e^{-2x}$;

(2) $y = e^{\frac{x}{2}}(\frac{5}{2}\cos\sqrt{7}x - \frac{5}{4\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}x) - \frac{3}{2}$;

(3) $y = \cos\omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x \cos 2t\sin\omega(x-t)dt$;

(4) $y = e^x(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{7}{5}\sin x) + \frac{1}{5}e^{-x}$;

(5) $y = (1-x)e^{2x}$;

(6) $y = (x - x^2 + \frac{2}{3}x^3)e^x$.

4. (1) $x = -C_1 - 2C_2\cos t - 2C_3\sin t + e^{-t} - t\cos t$,

$y = C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t - e^{-t} + \frac{1}{2}t\cos t$;

(2) $x = e^{-t}(C_1t^2 + C_2t + C_3) + t^2 - 3t + 3$,

$y = e^{-t}(-2C_1t - C_2) + t$,

$z = 2C_1e^{-t} + t - 1$;

(3) $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + 7C_3\cos 3t + 7C_4\sin 3t + \frac{14}{9}t$,

$y = -C_1e^t - C_2e^{-t} + 3C_3\cos 3t + 3C_4\sin 3t - \frac{4}{3}t$;

(4) $x = C_1 + C_2t + C_3e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{2t+1}{8}e^{-2t}$,

$y = -2C_3e^{-2t} + C_4 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{2t+1}{4}e^{-2t}$.

习 题 7-1

2. 令 $y_1 = y$, $y_2 = y'$，则可把(E)化为微分方程组的情形. 注意，在定

理2中当 $b\to+\infty$ 时，$\rho\to a$.

习 题 7-2

1. (1) $y_1=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot4}x^4+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!!}+\cdots$,

$y_2=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3\cdot5}x^5+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\cdots$;

(2) 递推公式为 $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{n+1}$, $n\geqslant1$, 解为

$y=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_n(x-1)^n+\cdots$,

分别取 $a_0=1,a_1=0$ 和 $a_0=0,a_1=1$ 可得两个线性无关解；

(3) 递推公式为 $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-a_{n-1}$, 两个解为

$y_1=1-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4-\frac{2}{5!}x^5+\cdots$,

$y_2=x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{2}{4!}x^4-\frac{5}{5!}x^5-\cdots$.

2. (1) $y''(0)=-1$, $y'''(0)=0$, $y^{(4)}(0)=-3$,

$y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{4!}x^4+\cdots$；

(2) $y''(0)=0$, $y'''(0)=-2$, $y^{(4)}(0)=0$, $y=x-\frac{2}{3!}x^3+\cdots$；

3. $y=a_0\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4+\cdots\right]+a_1\left[x+\frac{2-\lambda}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5+\cdots\right]$； 由于 $a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n$, 所以当 λ 为非负偶数时，上面的解就成为多项式，它称为 Hermite 多项式.

4. 先把 $\sin x$ 展成幂级数，然后再求幂级数解可得：

$y_1=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\cdots$,

$y_2=x-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\cdots$.

习 题 7-3

*1. 注意函数 $G(x,t)$ 满足方程 $(1-x^2)\frac{\partial^2G}{\partial x^2}-2x\frac{\partial G}{\partial x}+t^2\frac{\partial^2G}{\partial t^2}+2t\frac{\partial G}{\partial t}=0$.

2. 比较 t^n 的系数.

*3. 另一个线性无关的解为 $Q_n(x)=P_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}$. 关于

当 $x \to 1$ 时 $Q_n(x)$ 的无界性，可参考文献[14]中第 143 页的证明.

习　题　7-4

1. (1) $x=\pm 1$ 为常点，$x=0$ 为正则奇点；

   (2) $x=\pm 1$ 为正则奇点，$x=0$ 为常点；

   (3) $x=\pm 1$ 为正则奇点，$x=0$ 为非正则奇点；

   (4) $x=\pm 1$ 为正则奇点，$x=0$ 为非正则奇点；

   (5) $x=0,1$ 为常点，$x=-1$ 为正则奇点.

2. (1) $y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n+1)}\right]$,

$$y_2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)};$$

   (2) $y_1 = J_{\frac{1}{3}}(x)$, $\quad y_2 = J_{-\frac{1}{3}}(x)$;

   (3) $y_1 = x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)!!}\right]$,

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)!!}\right];$$

   (4) 只有一个广义幂级数解 $y = x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n\right]$;

   (5) 只有一个广义幂级数解 $y = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n$.

3. (3) 收敛半径为 1.

习　题　7-5

*3. 令 $t=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $y=t^{\frac{1}{3}}u$, 则方程化为 $t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+[t^2-(\frac{1}{3})^2]u=0$, 从而求得原方程的通解为 $y=\sqrt{x}\left[C_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$.

习　题　8-2

2. 零解稳定的充要条件为 $\int_0^{+\infty}a(s)ds<+\infty$；而零解渐近稳定的充要条件为 $\int_0^{+\infty}a(s)ds=-\infty$.

3. 平衡点 $r=0$ 是稳定的，但不是渐近稳定的.

4. 利用第二章 §2 的结果.

5. 取 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，由定理 4 可知：若存在 $\varepsilon>0$，使当 $0<x^2+y^2<\varepsilon$ 时，$f(x,y)>0$（$\geqslant 0$，或 <0）则方程的零解是渐近稳定的（稳定的，或不稳定的）.

6. 讨论与所给方程等价的方程组 $\dot{x}=y$，$\dot{y}=-g(x)$，并取 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds$.

7. 平衡点(1,0)是不稳定的；平衡点(−1,0)是稳定的，但不是渐近稳定的（可用第五章 §1 中的相平面作图法，或参考第八章 §4 中对方程(4.11)的奇点所作的分析）.

8. (1) 稳定； (2) 稳定； (3) 稳定； (4) 不稳定（考虑 $V=xy$）.

习 题 8-3

1. 不妨考虑矩阵 A 是下列三种情况之一：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

在第一种情况下（设 $\lambda\neq 0$），相轨线只有两种类型：y 轴上的每一点都是奇点，而垂直于 y 轴的每条直线被 y 轴分割成两条轨线. 在第二种情况下，y 轴上的每一点仍是奇点，而平行于 y 轴的每条直线都是轨线. 在第三种情况下，相平面上的每一点都是奇点.（请注意前两种情况下，非奇点的轨线上的方向.）

2. (1) 中心点； (2) 不稳定的两向结点； (3) 鞍点；
(4) 不稳定的单向结点； (5) 不稳定的星形结点.

3 利用格林公式.

习 题 9-1

1. 利用反证法.

2. 与方程 $y''+My=0$ 进行比较.

3. 适当选取函数 $u(x)$，使得在变换 $y=u(x)z$ 之下，把贝塞尔方程化为函数 z 关于 x 的方程后，z' 项系数为零（由此可定出 $u(x)$），从而可应用本节的判别法.

*4. 利用反证法和定理 2 以及解的周期性.

5. 在定理 2 中取 $R(x)=P(x)$.

习　题　9-2

1. (1) $\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$,　$y_n=\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$, $n=0,1,\cdots$;

(2) $\lambda_n=n^2\pi^2-1$,　$y_n=\cos n\pi x$,　$n=0,1,\cdots$.

2. 令 $x=e^t$,则方程化为 $\ddot{y}-(1+\lambda)\dot{y}-\lambda y=0$, 通解为 $y=C_1e^t+C_2e^{\lambda t}$.

3. 对方程(2.3) 作变换 $y=u(x)$,并选择适当的函数 u,使新的未知函数满足形如 $z''+A(x)z=0$ 的方程. 然后再令 $x=f(t)$,选择适当的 f,便可将(2.3) 化为(2.8) 的形式.

习　题　9-3

1. $\lambda_n=\frac{(2n+1)^2}{4(b-a)^2}\pi^2$,　$y_n=C_n\sin\frac{2n+1}{2(b-a)}\pi(x-a)$, $n=0,1\cdots$.

2. $\lambda_n=4n^2\pi^2$,　$y_n=C_n\sin 2n\pi x+D_n\cos 2n\pi x$, $n=0,1,2,\cdots$.

*3. 先取齐次方程 $y''+[\lambda+q(x)]y=0$ 的二个线性无关的解 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$,它们分别满足初值条件: $\varphi(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$, 和 $\psi(0,\lambda)=-\cos\alpha$, $\psi'(0,\lambda)=\sin\alpha$. 然后,利用常数变易法求解上述边值问题.

习　题　9-4

2. 注意 $F'(\xi)>0$, 当 $0\leqslant\xi\leqslant 1$. $p_1=\frac{B}{4\pi l^2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4$.

习　题　9-5

1. 应用本节的定理 5.

2. 令 $x=\lambda u$, 则方程化为 $u''+2u=\sin 2\pi t+5\lambda^2u^3$. 然后再利用本节的定理 5.

*4. 利用本章 §1 的习题 4.

习　题　10-2

1. 利用隐函数定理,参看本节定理 2 和定理 3 的证明.

2. 利用复合函数求导法则及本

习　题

2. 注意，若$C_1<0$(即初始点在单位圆内)，则这一轨线当$t\to-\infty$时都趋于(0,0)点. 因此，如果存在包含(0,0)点的大范围首次积分$\Phi(x,y)$，则Φ在单位圆内为常值. 而这与首次积分的定义相矛盾.

4. 这是把第2题的结果推广到一般情形.

习　题　11-1

1. (1) $y=\varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ \cdots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$;

(2) $u=\varphi\left(\frac{z-x}{y-z},\ (x-y)^2(x+y+z)\right)$;

(3) $h=\varphi\left(a^2-b^2+c^2,\ \frac{bc}{a}\right)$.

2. (1) $u=y-z-2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{y}-\sqrt{z})$;

(2) $z=f_0\left(\frac{y^2+x\pm\sqrt{(y^2+x^2)^2-4y^2}}{2y}\right)$.

习　题　11-2

1. (1) $u=\frac{1}{2}x^2yz-\frac{1}{6}x^3(3y+2z)+\frac{1}{2}x^4+\varphi(y-2x,\ z-3x)$;

(2) $z=\frac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)$.

2. $f=\{\exp[2(\sqrt{y}-1)]\}(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1)^2(\sqrt{z}-\sqrt{y}+1)^2$.

习　题　11-3

1. 初始曲线与方程的一条特征曲线重合，因此这初值问题有无穷多个解.

2. $z=\frac{(x^2-y^2)^2}{9y^2}$.